

Rekursion

Martin Steffen

Autumn 2017



Rekursion

- Lateinisch: *recurrere*

1. rekursiv = (zu
bekannten Werten)
zurückgehend

“Deutscher Wortschatz”,
U. Leipzig

Rekursion

Rückführung eines Problems auf ein einfacheres Problem



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Rekursion

- Lateinisch: *recurrere*

1. rekursiv = (zu
bekannten Werten)
zurückgehend

“Deutscher Wortschatz”,
U. Leipzig

Rekursion

Rückführung eines Problems auf ein (einfachere) Version
seiner selbst

- **Selbsbezüglichkeit**: rekursive Problemstellungen, Algorithmen, Definitionen, Datenstrukturen ...



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

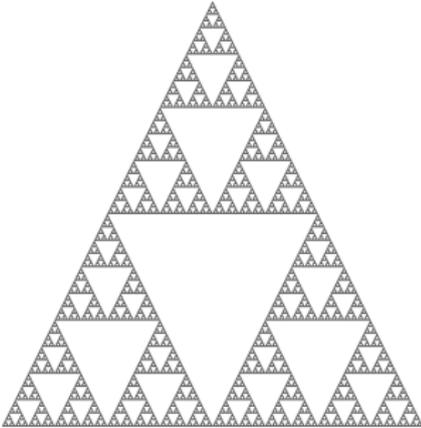
Rekursion



Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend



Multiplikation



Aus der Grundschule: $a \times b$

“ a mal b ” bedeutet: addiere b zu sich selbst und zwar a -fach.

$$a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \geq 0}$$

Example (4×3)

3
plus 3 gibt 6,
plus 3 gibt 9,
plus 3 gibt 12, und fertig.

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Multiplikation



Aus der Grundschule: $a \times b$

“ a mal b ” bedeutet: addiere b zu sich selbst und zwar a -fach.

$$a \times b = 0 + \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \geq 0}$$

Example (4×3)

3
plus 3 gibt 6,
plus 3 gibt 9,
plus 3 gibt 12, und fertig.

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Multiplikation



Aus der Grundschule: $a \times b$

“ a mal b ” bedeutet: addiere b zu sich selbst und zwar a -fach.

$$a \times b = 0 + \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \geq 0} = \sum_{i=1}^a b$$

Example (4×3)

3
plus 3 gibt 6,
plus 3 gibt 9,
plus 3 gibt 12, und fertig.

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Als statische Methode

```
public class Timesiter {
    public static long times_iter(int a, int b) {
        int r = 0;
        for (int i = 1; i <= a; i++) {
            r = r + b;
        };
        return r;
    }

    public static void main(String args[]) {
        System.out.println(times_iter(4, 3));
    }
}
```

Als statische Methode

```
public class Timesiter {  
    public static long times_iter(int a, int b) {  
        int r = 0;  
        for (int i = 1; i <= a; i++) {  
            r = r + b;  
        };  
        return r;  
    }  
}
```

```
public static void main(String args[]) {  
    System.out.println(times_iter(4, 3));  
}  
}
```

Als statische Methode (2)

```
public static long times_iter(int a, int b) {  
    int r = 0;  
    for (int i = 1; i <= a; i++) {  
        r = plus(r, b);  
    };  
    return r;  
}  
public static int plus(int x, int y) {  
    return x + y;  
}
```

Der Blick auf Wesentliche

```
times_iter(a, b) {  
    int r = 0;  
    for (i = 1; i <= a; i++) {  
        r = plus(r, b);  
    }  
    return r;  
}
```

```
plus(x, y) { return x + y; }
```

$$a \times b = 0 + \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \geq 0} = \sum_{i=1}^a b$$

Multiplikation: ein weiteres Mal



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

$$a \times b = 0 + \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \geq 0} = \sum_{i=1}^a b$$

Multiplikation: ein weiteres Mal



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

$$a \times b = b + \underbrace{b + \dots + b}_{a-1 \text{ "mal" } b} = b + ((a - 1) \times b)$$

Selbstbezügliche Definition (= rekursiv)

Multiplikation berechnet unter Zuhilfenahme von
Multiplikation (und Addition)

Multiplikation: ein weiteres Mal



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

$$a \times b = b + \underbrace{b + \dots + b}_{a-1 \text{ "mal" } b} = b + ((a - 1) \times b)$$

Selbstbezügliche Definition (= rekursiv)

Multiplikation von $a \times b$ berechnet unter Zuhilfenahme von
Multiplikation von $a - 1 \times b$ (und Addition)



Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

```
public static long times(int a, int b) {  
    if (a == 0) {  
        return 0;  
    } else {  
        return b + times(a-1, b);  
    }  
}
```



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

```
times(a, b) {  
    if (a == 0) {  
        return 0;  
    } else {  
        return b + times(a-1, b);  
    }  
}
```

$$a \times b = b + ((a - 1) \times b)$$



Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

```
times(a, b) {  
    if (a == 0) {  
        return 0;  
    } else {  
        return b + times(a-1, b);  
    }  
}
```

$$a \times b \leftarrow b + ((a - 1) \times b)$$

Und für negative Zahlen?



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

```
public static long times(int a, int b) {  
    if (a >= 0) {  
        if (a == 0) {  
            return 0;  
        } else {  
            return b + times(a-1, b);  
        }  
    } else {  
        return - (times(-a, b));  
    }  
}
```



Martin Steffen

Rekursion

Eine **rekursive** Methode ist definiert mittels ihrer selbst.

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend



Rekursion

Eine **rekursive** Methode ist definiert mittels ihrer selbst.

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

“Vernünftige Rekursion” (= Terminierung)

Zur Lösung eines Problems:

1. Definiere eine Methode mittels einer Anwendung ihrer selbst auf eine **“einfachere”** Version des Problems
2. und: es gibt ein **einfachstes** Problem, welches **direkt** (= ohne weitere Rekursion) lösbar ist, sodaß die Rekursion **“den Ausstieg findet”**.



Rekursion

Eine **rekursive** Methode ist definiert mittels ihrer selbst.

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

“Vernünftige Rekursion” (= Terminierung)

Zur Lösung eines Problems:

1. Definiere eine Methode mittels einer Anwendung ihrer selbst auf eine **“einfachere”** Versionen des Problems
2. und: es gibt ein **einfachste** Probleme, welches **direkt** (= ohne weitere Rekursion) lösbar ist sind, sodaß die Rekursion “den Ausstieg findet”.



Iterativ: “1 mal 2 mal 3 usw. bis n ”

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n - 1) \times n = \prod_{i=1}^n i$$

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Iterativ: “1 mal 2 mal 3 usw. bis n ”

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^n i$$

```
factorial_iter (n) {  
    long result = 1;  
    for (i = 1; i <= n; i++) {  
        result = result * i;  
    };  
    return result;  
}
```

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Das Ganze nochmal rekursiv



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

Das Ganze nochmal rekursiv



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

$$n! = n \times \underbrace{(n-1) \times \dots \times 2 \times 1}_{(n-1)!}$$

```
factorial (n) {  
    if (n == 1) return 1;  
    return n * factorial (n-1);  
}
```

Zum Vergleich

```
factorial_iter(n) {  
    long result = 1;  
    for (i = 1; i <= n; i++) {  
        result = result * i;  
    };  
    return result;  
}
```

- Variable `result` Schritt für Schritt (= **iterativ**) aktualisiert

```
factorial(n) {  
    if (n == 1) return 1;  
    return n * factorial(n-1);  
}
```

- Variable `result` **lokal** im Methodenrumpf
- genau *ein* Wert pro Aufruf

Zum Vergleich

```
factorial_iter(n) {  
    long result = 1;  
    for (i = 1; i <= n; i++) {  
        result = result * i;  
    };  
    return result;  
}
```

- Variable `result` Schritt für Schritt (= **iterativ**) aktualisiert

```
factorial(n) {  
    long result;  
    if (n == 1) result = 1; }  
    else {  
        result = n * factorial(n-1);  
    };  
    return result;  
}
```

- Variable `result` **lokal** im Methodenrumpf
- genau *ein* Wert pro Aufruf

Zur Laufzeit

$fac(5)$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$

$4 \times$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$

$4 \times fac(3)$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$

$4 \times fac(3)$

$3 \times$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$$fac(5)$$

$$5 \times fac(4)$$

$$4 \times fac(3)$$

$$3 \times fac(2)$$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$$\text{fac}(5)$$

$$5 \times \text{fac}(4)$$

$$4 \times \text{fac}(3)$$

$$3 \times \text{fac}(2)$$

$$2 \times$$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$$fac(5)$$

$$5 \times fac(4)$$

$$4 \times fac(3)$$

$$3 \times fac(2)$$

$$2 \times fac(1)$$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

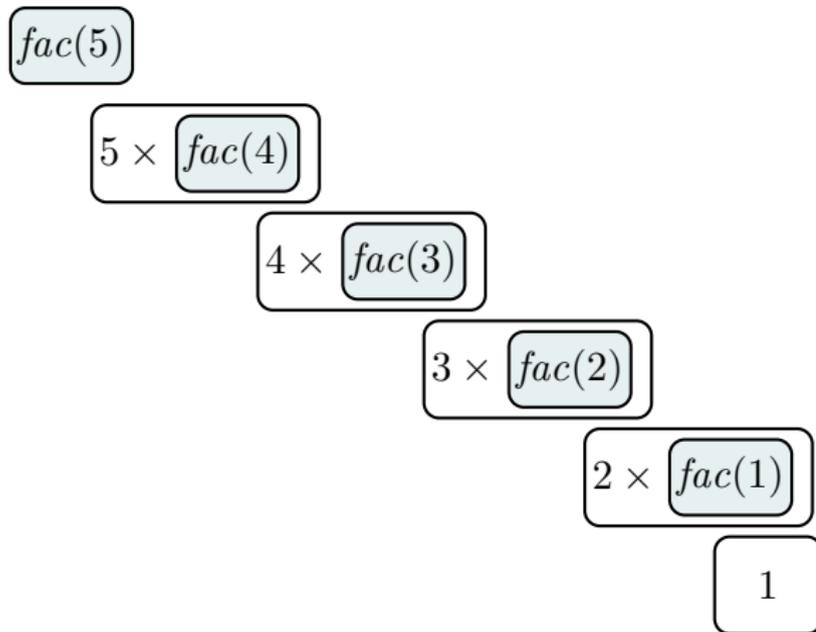
Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$$fac(5)$$

$$5 \times fac(4)$$

$$4 \times fac(3)$$

$$3 \times fac(2)$$

$$2 \times 1$$



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$

$4 \times fac(3)$

3×2



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

$5 \times fac(4)$

4×6



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

$fac(5)$

5×24



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Zur Laufzeit

120



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Aufrufer und Aufgerufener

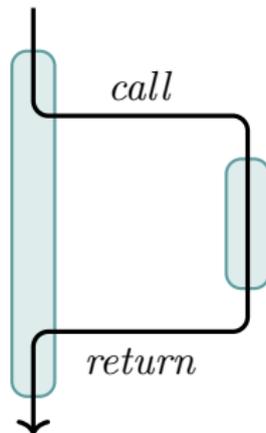


Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend

caller *callee*



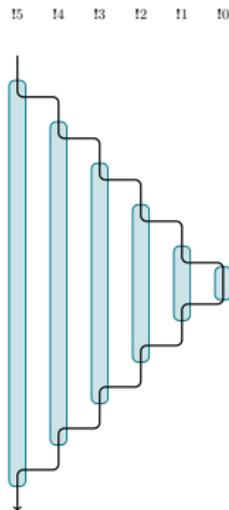
Lebenszeit lokaler Variabler



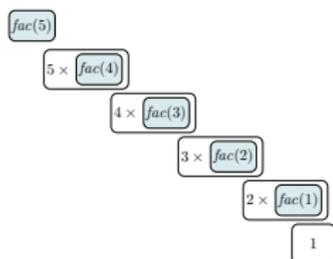
Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend



Laufzeitstapel



```
factorial(n) {  
    long result;  
    if (n == 1) { result = 1; }  
    else {  
        result = n * factorial(n-1);  
    };  
    return result;  
}
```

- $n!$: bis zu $n + 1$ (hier 6) **Inkarnationen** von `result`
- Allokierung/Deallokierung: **LIFO** \Rightarrow Laufzeitstapel
- *dynamische* Speicherverwaltung
- Engl: *runtime stack*

Leonardo da Pisa



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Dar Karnickelproblem



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

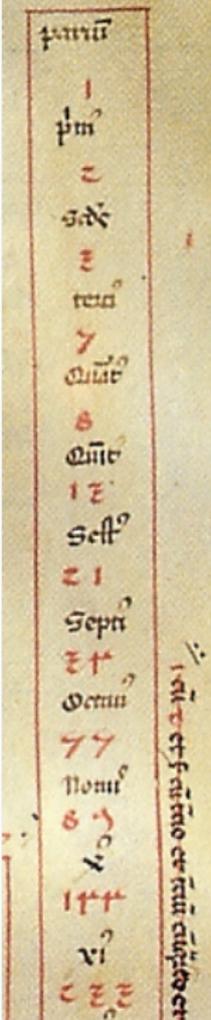
1. Ein Kaninchen wird in *einem* Monat erwachsen
2. jedes erwachsene Kaninchenpaar bringt jeden Monat ein Kaninchenpaar zur Welt

Frage

Startet man mit **einem Paar**, wieviele **Paare** hat man nach n Monaten

Fibonacci's Lösung

Monat	Kaninchenpaare		
	neugeboren	erwachsen	gesamt
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
		⋮	

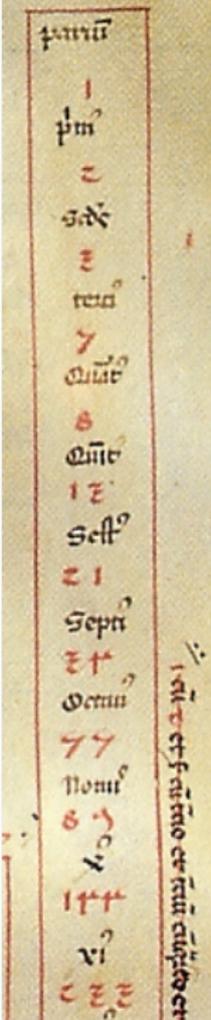


Fibonacci's Lösung

Monat	Kaninchenpaare		
	neugeboren	erwachsen	gesamt
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8

⋮

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \text{ oder } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{ansonsten} \end{cases}$$





Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

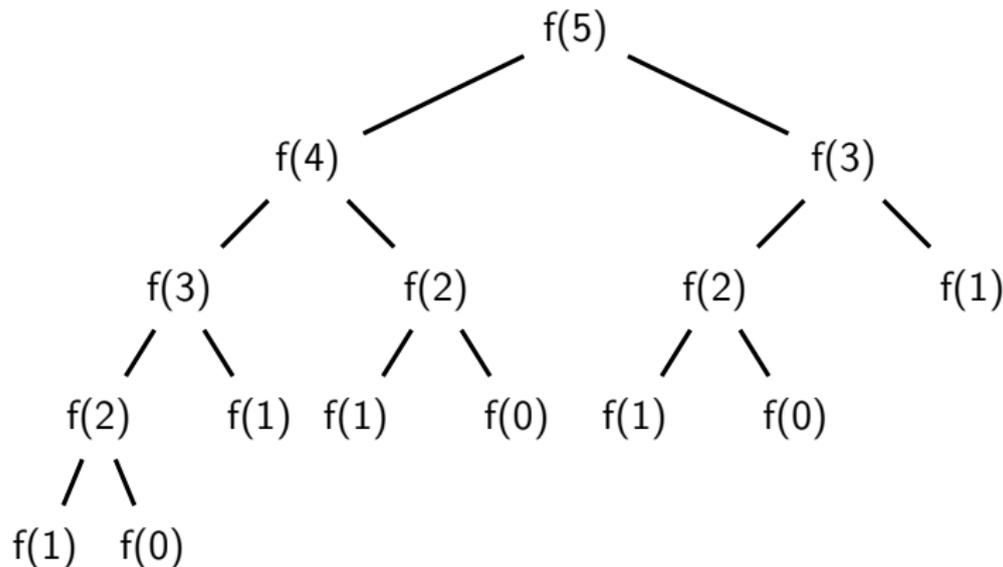
Binäre Suche

Abschließend

```
public static int fibonacci(int n) {  
    if (n == 0) return 1;           // Basisfall  
    if (n == 1) return 1;         // Basisfall  
    return  
        fibonacci (n-1) + fibonacci(n-2); // Induktionsfall  
}
```

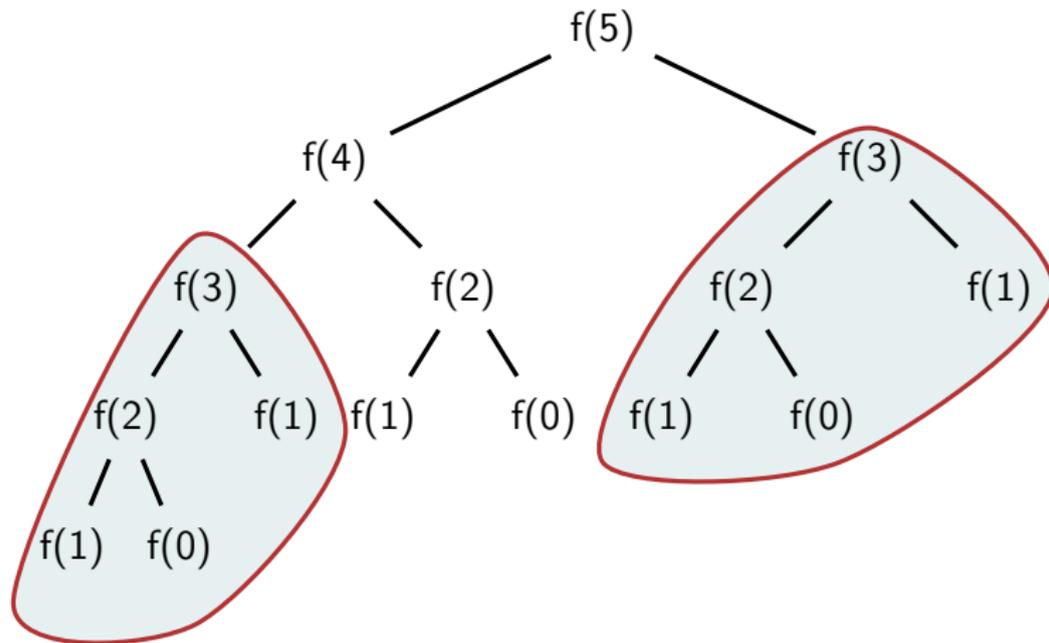
Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend



Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend





Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

```
\node{f(5)}  
child{node {f(4)}  
  child{node {f(3)}  
    child{node {f(2)}  
      child{node {f(1)}}  
      child{node {f(0)}}  
    }  
    child{node {f(1)}}  
  }  
  child{node {f(2)}  
    child{node {f(1)}}  
    child{node {f(0)}}  
  }  
}  
child{node {f(3)}  
  child{node {f(2)}  
    child{node {f(1)}}  
    child{node {f(0)}}  
  }  
  child{node {f(1)}}  
}  
;  
;
```

U:--- **fibonaccitree.tex**

Baum = rek. Datenstruktur

Baumknoten =

- Knoten ohne Kinder (“Blatt”),
oder
- mit n (hier 2) **Baumknoten** als
Kinder



Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

```
public class TreeO {  
    private TreeO left, right = null;  
    private Object data;  
}
```

in der Praxis: Baum-Datenstruktur meist komplexer

- Liste von Kindern/Unterbäumen
- anstelle Object: *“generics”*
- weitere Methoden, Konstruktoren, Zeiger
- vermeide null-Zeiger
- Interfaces
- ...

Das geht noch effizienter



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

```
public static int fibonacci(int n, int a, int b) {  
    if (n == 0) return b;    // let 's start with 1  
    return fibonacci (n-1,b,a+b);  
}
```

- a = “neugeboren”, b = “erwachsen”
- Aufruf mit `fibonacci(n, 0, 1)`

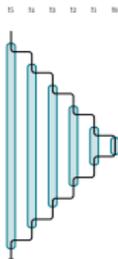
Lebenszeit lokaler Variabler



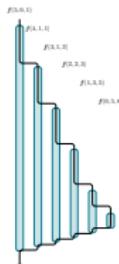
Fak. iterativ



Fak. rekursiv



Fib. rekursiv

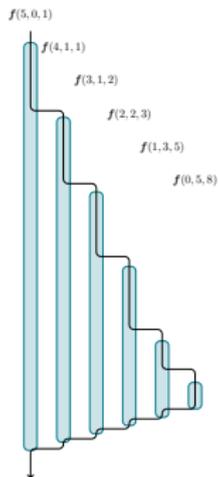


Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend

```
public static int fibonacci(int n, int a, int b) {  
    if (n == 0) return b; // let 's start with 1  
    return fibonacci (n-1,b,a+b);  
}
```

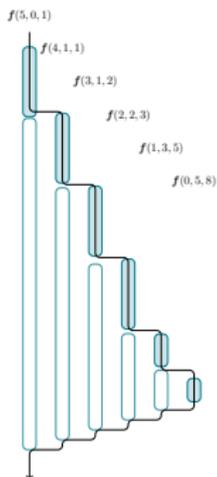


- Engl: *tail recursion*
- rekursiver Aufruf: das **Letzte** im Methodenrumpf

```
public static int fibonacci(int n, int a, int b) {  
    if (n == 0) return b; // let 's start with 1  
    return fibonacci(n-1, b, a+b);  
}
```

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend



- Engl: *tail recursion*
- rekursiver Aufruf: das **Letzte** im Methodenrumpf
- eigentlich:
 - Stack tut nicht Not ...
 - iterativ-rekursiv
- oft: Compileroptimierung (nicht in Java, aber auf der Todo-Liste)

```
public static int fibonacci(int n, int a, int b) {  
    if (n == 0) return b; // let 's start with 1  
    return fibonacci (n-1,b,a+b);  
}
```

“Endrekursive” Aufrufe?



Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend

```
public static int fibonacci(int n, int a, int b) {  
    if (n != 0) return fibonacci(n-1, b, a+b);  
    return b;  
}
```



```
public static long factorial(int n) {  
    if (n == 1) return 1;  
    return n * factorial(n-1);  
}
```

LEARN ERLANG

absolute beginners

Erlang Tutorial

- Erlang - Home
- Erlang - Overview
- Erlang - Environment
- Erlang - Basic Syntax
- Erlang - Shell
- Erlang - Data Types
- Erlang - Variables
- Erlang - Operators
- Erlang - Loops
- Erlang - Decision Making
- Erlang - Functions
- Erlang - Modules
- Erlang - Recursion
- Erlang - Numbers
- Erlang - Strings
- Erlang - Lists
- Erlang - File I/O
- Erlang - Atoms
- Erlang - More

⌂ Previous Page

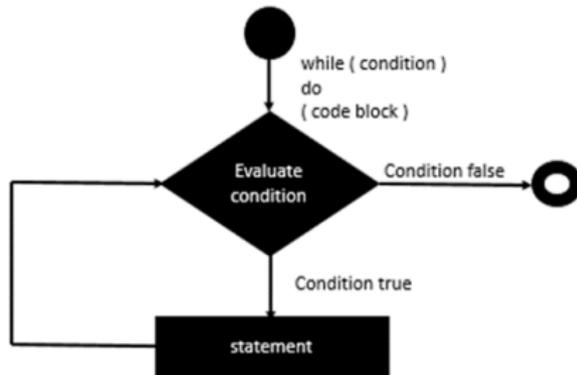
Next Page ⌂

Erlang is a functional programming language and what needs to be remembered about all functional programming languages is that they don't offer any constructs for loops. Instead, functional programming depends on a concept called recursion.

while Statement Implementation

Since there is no direct while statement available in Erlang, one has to use the recursion techniques available in Erlang to carry out a while statement implementation.

We will try to follow the same implementation of the while loop as is followed in other programming languages. Following is the general flow which will be followed.



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Rekursion vs. Iteration



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

- Rekursion vs. Iteration: im Prinzip *gleich ausdrucksstark*
-

Rekursion, nur etwas für “Zahlentheoretiker”?



Martin Steffen

Git: Mergen

```
[msteffen@rijkaard mmgo]$ git pull
remote: Counting objects: 9, done.
remote: Compressing objects: 100% (2/2), done.
remote: Total 9 (delta 7), reused 9 (delta 7), pack-reused 0
Unpacking objects: 100% (9/9), done.
From github.com:dfava/favasynthesis
 0d9fa6c..154dd44 master -> origin/master
Merge made by the 'recursive' strategy.
 papers/mmgo/intro.tex | 52 ++++++-----
 1 file changed, 30 insertions(+), 22 deletions(-)
[msteffen@rijkaard mmgo]$ █
```

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend

Rekursion, nur etwas für “Zahlentheoretiker”?



Martin Steffen

Internet DNS

Recursive DNS is essentially the opposite of Dyn Standard DNS which is an authoritative DNS service that allows others to find *your* domain while Recursive DNS allows you to resolve other people's domains.

The Longer Answer

Recursive DNS provides recursive DNS. Yes, that's recursive (something which repeats or refers back to itself) and confusing. In order to make a distinction between the service we provide and the general concept of recursive DNS, here's an explanation.

To better illustrate how recursive DNS works, let's imagine you are sitting at a computer in your study at home. You're connected to the Internet by a cable connection and you are surfing the web looking for widgets. You have no idea where to find widgets, so you open your web browser and type in `http://www.google.com`.

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Rekursion, nur etwas für “Zahlentheoretiker”?



Martin Steffen

der Millionen-Raub mittels Rekursion¹

Deconstructing theDAO Attack: A Brief Code Tour

18 JUNE 2016 on thedao, security, ethereum, solidity

TheDAO was attacked today, and the attacker seems to have made off with 3.5mm ether (at time of writing in excess of \$45mm). The vulnerability was the Race To Empty or **Recursive Call attack**.

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

¹in virtuellem Geld (Ether “blockchain”) und nur zeitweise.



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index *wo*

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
i=0

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index *wo*

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
 $i=1$

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index *wo*

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
i=2

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index *wo*

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
 $i=3$

Ziel

- Input: Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
i=4

Das geht noch besser: Binäre Suche



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Ziel

- Input: **sortiertes** Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Das geht noch besser: Binäre Suche



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

Ziel

- Input: **sortiertes** Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
⋮
i=7

Das geht noch besser: Binäre Suche



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

Ziel

- Input: **sortiertes** Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
⋮
i=3

Das geht noch besser: Binäre Suche



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Ziel

- Input: **sortiertes** Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
⋮
i=5

Das geht noch besser: Binäre Suche



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung
Multiplikation
Rekursion & Iteration
Fibonacci
Binäre Suche
Abschließend

Ziel

- Input: **sortiertes** Integer-Array + Zahl
- Output: Falls die Zahl im array ist: Index wo

3	12	21	23	42	48	50	55	57	60	62	67	75	79	89	91
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↑
⋮
i=4



Teile & Herrsche: Suche nach `elem`

- Schlag' nach in der *Mitte* des Arrays
- falls **gleich** `elem` \Rightarrow fertig
- falls **kleiner** `as` als `elem` \Rightarrow suche **rekursiv** in der rechten Hälfte
- falls **größer** `as` als `elem` \Rightarrow suche **rekursiv** in der linken Hälfte

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

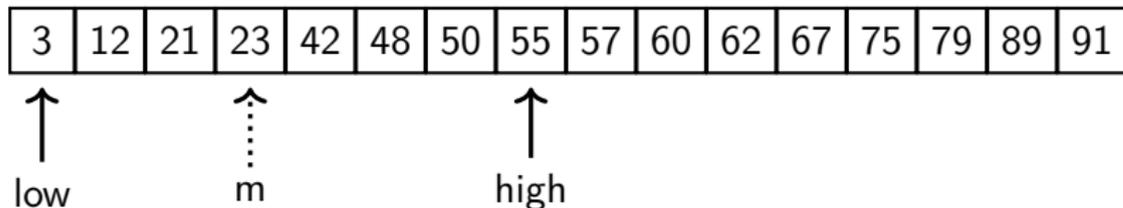
Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

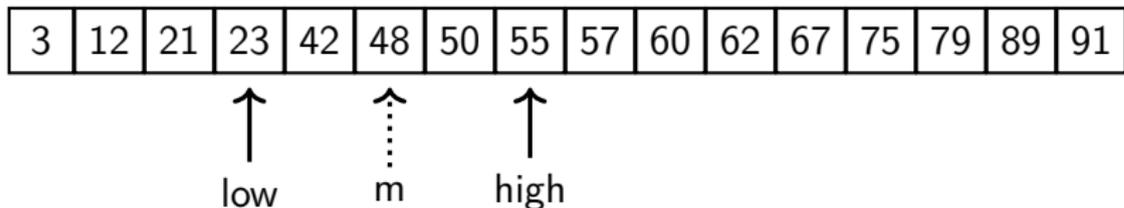
In Java

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {
    System.out.println(low);
    System.out.println(high);
    if (low == high) {
        if (elem == a[low]) {
            return low;
        } else {
            return -1;
        }
    } else { // low ≠ high
        int m = (low + high) / 2;
        if (elem < a[m]) {
            return search(elem, a, low, m-1);
        } else {
            return search(elem, a, m+1, high);
        }
    }
}
```



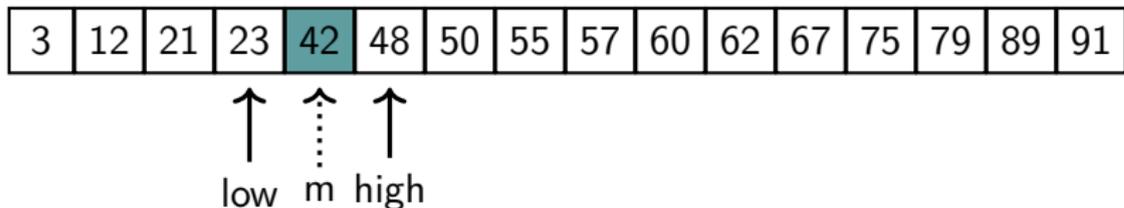
In Java

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {  
    System.out.println(low);  
    System.out.println(high);  
    if (low == high) {  
        if (elem == a[low]) {  
            return low;  
        } else {  
            return -1;  
        }  
    } else { // low ≠ high  
        int m = (low + high) / 2;  
        if (elem < a[m]) {  
            return search(elem, a, low, m-1);  
        } else {  
            return search(elem, a, m+1, high);  
        }  
    }  
}
```



In Java

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {
    System.out.println(low);
    System.out.println(high);
    if (low == high) {
        if (elem == a[low]) {
            return low;
        } else {
            return -1;
        }
    } else { // low ≠ high
        int m = (low + high) / 2;
        if (elem < a[m]) {
            return search(elem, a, low, m-1);
        } else {
            return search(elem, a, m+1, high);
        }
    }
}
```



“Korrektheit”

Argument

1. Die “teile-und-herrsche” Idee scheint einleuchtend
2. Terminierung
 - jeder rekursive Aufruf macht das Problem **echt kleiner** (Induktionsfall)
 - es gibt ein **kleinstes** Problem (Basisfall)



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend



Argument

1. Die “teile-und-herrsche” Idee scheint einleuchtend
2. Terminierung
 - jeder rekursive Aufruf macht das Problem **echt kleiner** (Induktionsfall)
 - es gibt ein **kleinstes** Problem (Basisfall)
 - **leider nur scheinbar** ...

Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

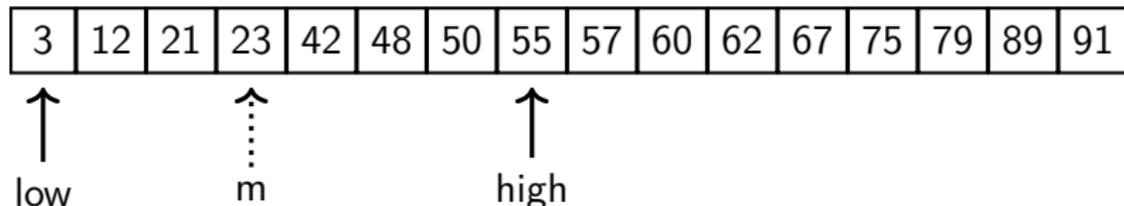
```
-*- mode: compilation; default-directory: "~/javaexamples/" -*-  
Compilation started at Wed Oct 11 15:58:48
```

```
java Binsearch  
Exception in thread "main" java.lang.StackOverflowError  
____ at Binsearch.search(Binsearch.java:12)  
____ at Binsearch.search(Binsearch.java:12)  
____ at Binsearch.search(Binsearch.java:12)  
____ at Binsearch.search(Binsearch.java:12)  
____ at Binsearch.search(Binsearch.java:12)
```

```
-%*- *compilation* Top L1 [(Compilation:exit [1] Abbrev)]
```

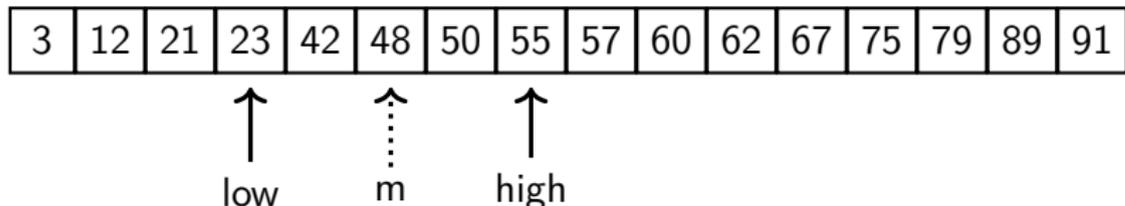

Auf den zweiten Blick ...

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {  
    if (low > high) return -1; // empty  
    int m = (low + high) / 2;  
    if (elem == a[m]) return m;  
    if (elem < a[m]) {  
        return search(elem, a, low, m-1);  
    } else {  
        return search(elem, a, m+1, high);  
    }  
}
```



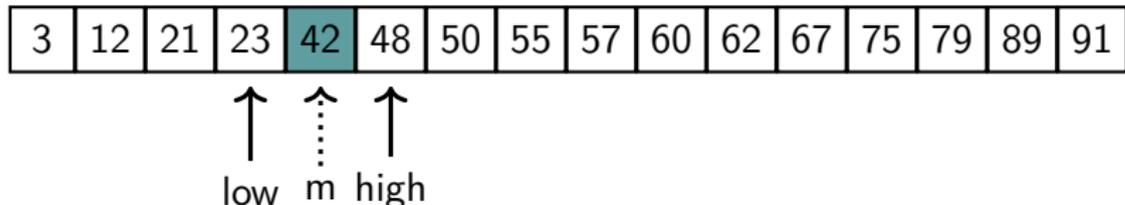
Auf den zweiten Blick ...

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {  
    if (low > high) return -1; // empty  
    int m = (low + high) / 2;  
    if (elem == a[m]) return m;  
    if (elem < a[m]) {  
        return search(elem, a, low, m-1);  
    } else {  
        return search(elem, a, m+1, high);  
    }  
}
```



Auf den zweiten Blick ...

```
static int search (int elem, int[] a, int low, int high) {  
    if (low > high) return -1; // empty  
    int m = (low + high) / 2;  
    if (elem == a[m]) return m;  
    if (elem < a[m]) {  
        return search(elem, a, low, m-1);  
    } else {  
        return search(elem, a, m+1, high);  
    }  
}
```



The bug that “fixed itself”

```
while (days > 365) {  
    if (IsLeapYear(year)) {  
        if (days > 366) {  
            days -= 366;  
            year += 1;  
        }  
    } else {  
        days -= 365;  
        year += 1;  
    }  
}
```



Martin Steffen

Rekursion

- Einleitung
- Multiplikation
- Rekursion & Iteration
- Fibonacci
- Binäre Suche
- Abschließend

Vielleicht nur ein Anfängerfehler ... ?



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Proving that Android's, Java's and Python's sorting algorithm is broken (and showing how to fix it)

🕒 February 24, 2015 📖 Envisage ✍️ Written by Stijn de Gouw. 🧑 👤 \$s

Tim Peters developed the **Timsort hybrid sorting algorithm** in 2002. It is a clever combination of ideas from merge sort and insertion sort, and designed to perform well on real world data. TimSort was first developed for Python, but later ported to Java (where it appears as `java.util.Collections.sort` and `java.util.Arrays.sort`) by **Joshua Bloch** (the designer of Java Collections who also pointed out that **most binary search algorithms were broken**). TimSort is today used as the default sorting algorithm for Android SDK, Sun's JDK and OpenJDK. Given the popularity of these platforms this means that the number of computers, cloud services and mobile phones that use TimSort for sorting is well into the billions.

Und die Moral . . .



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

- Finger weg von Rekursion?
- Basisfälle (und Spezialfälle) besonders *fehleranfällig* (“one-off” Fehler)
- funktioniert in den allermeisten Fällen \neq **korrekt**

“Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence”

Dijkstra 1970, p. 7

- ultimativ: sorgfältiges Argumentieren (“Korrektheitsbeweis”) angesagt.



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

- in-direkte Rekursion (“call-backs”)
- Induktion & Rekursion
- Induktive/Rekursive **Datenstrukturen** und korrespondierende Algorithmen (z.B. Bäume).
- Komplexität
- ...



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Die Folien wurden mit

- gnu emacs *org-mode* (“gnu’s not Unix”)
- \LaTeX , und
- TikZ (“TikZ ist kein Zeichenprogramm”)

erstellt.

Das “Design” verdankt Inspiration den elaborierten Style-files der Uni Lübeck (M. Leucker, V. Stolz).



Martin Steffen

Rekursion

Einleitung

Multiplikation

Rekursion & Iteration

Fibonacci

Binäre Suche

Abschließend

Das meiste ist “Allgemeinwissen” und die Vorlesung basiert auf keinem speziellen Buch oder Quelle. Ähnliche Beispiele finden sich in praktisch allen Einführungen in Java oder auch in andere Programmiersprachen. Bilder, sofern nicht selbstgemachte Grafiken, sind ebenso aus “schöpferischem Gemeingut” (creative commons). Spezielle Internetfunde sind klickbar mit eingebetteten Links.