Algorithmen & Datenstrukturen

Yassine Lakhnech, Martin Steffen

Sommersemester 1999

Lektion I

Einleitung

Literatur: Baut auf Kapitel 1 von [CLR90] auf. Etymologie des Wortes Algorithmus aus [Knu73a]

Inhalt: Algorithmus · Analyse von Algorithmen · Zeitkomplexität und Speicherkomplexität · Algorithmenentwurf

Aufbau

- Einleitung und Überblick
- Sortieren
- Suchen
- dynamische Datenstrukturen
- Bäume, Graphen
- ...

Algorithmus

- Namensgeber: Abu Ja'far Mohammed ibn Mûsâ al-Kwoarizmî: *Kitab al jabr w'al-muqabala* (Regeln zur Wiederherstellung und Reduktion)
- heutige (informelle) Bedeutung ([Knu73a])
  - (endliche Beschreibung)
  - Definiertheit
  - Terminierung
  - besitzt Input[1] und Output
  - effektivness, jeder Schritt ist effektiv ausführbar
  - zur Lösung eines wohlspezifizieren Berechnungsproblems

[1] eventuell leer

Berechnungsproblem: Sortieren

- Eingabe: endliche Sequenz von $s = (a_1, a_2, \ldots a_n)$
- Ausgabe: Permutation $(a'_1, \ldots a'_n)$ von s mit $a'_i \leq a'_{i+i}$ für alle $i \in \{1, \ldots n\}$
- Algorithmus korrekt/löst das Problem, falls für alle Eingaben
  - Algorithmus hält nach endlicher Zeit
  - liefert da korrekte Ergebnis

Beispiel: Insertion-Sort

- Sortieren durch Einfügen
- Imperative Lösung:
  - Eingabe: Array A fester Länge n von Zahlen
  - Ausgabe: monoton-steigen sortierer Array, Permutation von A.
  - direktes Einfügen ("in situ" sortieren)
- Bild
- Code

```
Insertion_sort(A)

  for j = 2 to length[A]
    do key := A[j];
         i :=  j-1;
       while   i > 0 and A[i] > key
          do
               A[i+1] := A[i]
                    i := i-1;

       A[i+1] := key;
```

Analyse von Algorithmen

- Analyse:
  - Zeitkomplexität: Anzahl elementarer Schritte
  - Speicherkomplexität:
  - Sonstiges (Kommunikationsbandbreite . . .)
- Komplexität: hängt von der Eingabe ab
- maßgebend: asymptotisches Verhalten (O-Notation)
  - worst-case, best-case, average-case

Analyse des Sortierens durch Einfügen

- Sei t_j: Anzahl der *while*-tests für den Wert von j
- Bild aus [CLR90]
- Abhängig vom Input

		t_j	$T(n)$
bester Fall	sortiert	1	$an + b$
schlechterster Fall	rückwärts sortiert	j	$an^2 + bn + c$

$$T(n) = c_1 + c(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j -$$

Algorithmenentwurf

- Inkrementell: vgl. Sortieren durch Einfügen.
- Divide-and-Conquer: rekursive Zerlegung des Problems:
  1. Divide: Zerlegen des Problem in (gleichartige, aber kleinere) Unterprobleme
  2. Löse die Teilprobleme rekursiv
  3. Conquer: Zusammenfügen zur Gesamtlösung.

D&C: Mergesort

- klassisches Beispiel für D&C
  1. Divide: Zerlege die Sequenz in zwei Hälften
  2. Sortiere sie rekursiv
  3. Conquer: Verschmelzen ("$merge$") der sortierten Sequenzen
- Aufruf: $Merge\_Sort(A, 1, length(A))$

```
Merge_Sort(A,p,r)

  if p < r
     then   q := floor(p+q/2);
        Merge_Sort(A,p,q);
        Merge_Sort(A,q+1,r);
        Merge(A,p,q,r);
```

```
Merge(A,p,q,r)

/* A[p..q] und A[q+1..r] sind sortiert       */
/* B Array[1..r-p], d.h. der L"ange   r-p+1  */

  i := p; j:=q+1; k:=1;    /* init */

  k := 1;
  loop exit when i==(q+1) or j==(r+1)
  do
    if A[i] <= A[j]
    then B[k] := A[i];
    i := i+1
    else B[k] := B[j];
    j := j+1
    fi;
    k := k+1;
  od;

  if i ==(q+1)
     then
          B[k,..,r-p+1] = A[j,..,r];
     else B[k,..r-p+1]  = A[i,..,q];

   return B;
```

Analyse von Merge-Sort

- rekursiver Algorithmus $\Rightarrow$ Komplexität durch Rekurrenzgleichung
- Vereinfachung: Länge $= 2^n$
- im schlimmsten Fall

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

- $T(n) = n \log n$

Lektion II

Sortieren

Literatur: Kapitel 7 und 8 aus [CLR90]. Knuth [Knu73b] enthält mehr über Sortieren als man wissen will.

Inhalt: Heapsort · Quicksort

Heap sort

- Heap: vollständiger binärer Baum.[2]
- Bild
- Heap-Eigenschaft: Für alle Teilbäume t gilt: $t = Node(l, a, r) \Rightarrow l = Leaf$ (und $l = Leaf$) oder $a \geq Key(l)$ und $a \geq Key(r)$

22. April 1999

[2] Binäre Bäume sind geordnet. vollständig: entweder Blatt oder genau zwei geordnete Kinder (`'a Btree = Leaf | Node of ('a Btree * 'a * 'a Btree)`)

Heaps als Array

- Implementierung von Heaps als Array: Knoten als Arrayelemente

$\Rightarrow$ Zusatzbedingung: alle Ebenen des Baums gefüllt bis auf evtl. die letzte, diese kann von links nach rechts teilgefüllt sein.[3]

- Füllung des Arrays von 1 bis $heapsize$ (Bild)
- Repräsentierung des Binärbaumes:

$$\begin{aligned} Parent(i) &= \lfloor \tfrac{i}{2} \rfloor \\ Left(i) &= 2i \\ Right(i) &= 2i + 1 \end{aligned}$$

[3] Länge des Arrays $l = 2^n - 1$ mit $2^n - 1 \geq heapsize$ für minimales n.

Einfügen in den Heap

- *Heapify*: Einfügen, Erhalt der Heapbedingung
- rekursive Prozedur: "Einsickern" des neuen Elementes

```
Heapify (A, i)
  l := Left(i); r := Right(i);

  if l <= heapsize[A] and A[l] > A[i]
     then largest := l  else largest := i;
  if r <= heapsize(A) and  A[r] > A[largest]
     then largest := r;

  if largest != i
     then exchange A[i] , A[largest];
          Heapify(A,largest);
```

Aufbau des Heaps

- Bottom-up mittels `Heapify`
- Blätter erfüllen Heap-Eigenschaft $\Rightarrow$ Start bei den untersten nicht-Blatt Knoten

```
Build-Heap(A)
  heapsize[A]  := length[A];
  for i= floor(length(A)/2)) downto 1
      do
         heapify(A,i);
```

Heapsort

- Heap als "teilsortiertes" Reservoir
- Entfernen aus dem Heap ist billig (Heapify $\log_2(n)$)

```
Heapsort(A)

   build_heap(A);
   for i = length(A) downto 2
   do  exchange A[1] A[i];
       heapsize[A] := heapsize[A] - 1;
       Heapify(A,1);
```

Quicksort

- Divide & Conquer
- im Gegensatz zu Mergesort: Verschmelzen trivial, investiere dafür mehr in das Divide
- D&C-Schritte:
  1. Divide: Teile die Sequenz σ in zwei Teilsequenzen σ_1 und σ_2, sodaß $\sigma_1 \leq \sigma_2$ (punktweise)
  2. Sortiere Teilsequenzen σ_1 und σ_2
  3. Conquer: Zusammenfügen trivial

Quicksort (2)

```
let rec filter p l = match l with
    []     -> []
  | x :: tl ->
      if   (p x)
      then  x::(filter p tl)
      else  filter p tl;;

let rec qsort (l : int list) =   match l with
         []  -> []
  | x :: tl  ->
      qsort (filter (function y -> y <  x) tl)
      @ [x] @                                    (* Pivot *)
      qsort (filter (function y -> y >= x) tl);;
```

Quicksort mit arrays (1)

- Zwei rekursive Aufrufe
- das Divide: `Partition` liefert den Index für die Trennung in die kleinere und größere Hälfte

```
Quicksort(A,p,r)
if  p < r
    then   q := Partition(A,p,r)
           Quicksort(A,p,q);
           Quicksort(A,q+1,r);
```

Quicksort mit arrays: Partitionieren

- Wähle ein Element des Arrays: das Pivot x
- Partitionieren: trenne/ordne A in 2 Hälften, links alle $\leq x$, rechts alle $\geq x$.
- Invariante:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I_1} & A[i'] \leq x \leq A[j'] \quad \text{für alle } i' < i,\ j' > j. \\ \mathbf{I_2} & A[i'] \leq x \leq A[j'] \quad \text{für alle } i' \leq i,\ j' \geq j. \end{array}$$

- Abbruch: $(i \geq j) \wedge \mathbf{I_1}$, d.h., $A[p \ldots i-1] \leq x \leq A[j+1 \ldots r]$, daraus folgt $A[p \ldots j] \leq x \leq A[j+1 \ldots r]$

```
Partition(A,p,r)   /* p <= r */
  x := A[p];
  i := p-1;
  j := r+1;

  while true                              /* Invariante I_1 */
  do     repeat j := j-1
           until A[j] <= x;
         repeat i := i+1
           until A[i] >= x;
         if   i < j
         then exchange A[i] <-> A[j]      /* Invariante I_2 */
         else return   j;                 /* j <= i         */
  od;
```

Analyse von Quicksort: worst case

- Schlechtester Fall: Partitionierung trennt den Ausschnitt $[p \ldots r]$ der Länge $n = r - p + 1$ in einen Teile der Größe 1 und $n - 1$.
- Kosten der Partitionierung: $O(n)$
- Rekurrenz: $T(n) = T(n-1) + O(n) \Rightarrow T(n) = \sum_{k=1}^{n} O(k) = O(n^2)$
- Schlimmster Fall: Falls A bereits sortiert

Analyse von Quicksort: best case

Lektion III

Lineares Sortieren

Literatur: Kapitel 9 [CLR90].

Inhalt: O-Notation · Einführung · Vergleichssortieren · Counting sort · Bucket sort

Einführung

- Bisher: die Algorithmen $O(n \log n)$ oder $O(n^2)$
- Gemeinsamkeit:

  Die Ordnung die die Algorithem bestimmen, beruht *ausschließlich* auf dem *Vergleich* zwischen Elementen

$\Rightarrow$ **Vergleichssortieren**

Sortieren: Überblick

Verfahren	T_{min}	T_{max}	T_{av}
Auswahl	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Einfügen	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Bubblesort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Mischen	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
direktes Mischen	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
natürliches Mischen	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Quicksort	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$

Tabelle 1: Vergleich

Abschätzung für Vergleichssortieren

- Vorraussetzung: Sortieren einer Sequenz $(a_1, \ldots a_n)$ (oBdA: alle Elemente verschieden, wichtig ist nur $\leq$ oder das Gegenteil.)
- Entscheidungsbaum: Darstellung der Entscheidungen eines Sortieralgorithmusses
  - interner Knoten: $a_i : a_j$ wobei $1 \leq i, j \leq n$
  - Blatt: Permutation
- Lauf der Sortierung: Pfad durch den Baum
- Folie: *insertion sort*

29. April 1999

Vergleichssortieren: worst-case

- gegeben: Entscheidungsbaum für einen Algorithmus
- worst-case = Tiefe des Baumes

$\Rightarrow$ Abschätzung für die Laufzeit:

Theorem 1 (Untere Schranke für worst-case) Die Höhe ein Entscheidungsbaums der n Elemente sortiert besitzt eine untere asymptotische *untere* Schranke der Größe $O(n \lg n)$.

- Mischsortierung und Heapsort sind asymptotisch optimal.

Abschätzung der Laufzeit(2)

Beweis:

- Es gibt $\geq n!$ Blätter
- $n! \leq n^h$, d.h. $h \geq \lg(n!)$

$\Rightarrow$ $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\Rightarrow$ $h \geq n \lg n - n \lg e$

$\Rightarrow$ Untere Schranke $O(n \lg n)$.

□

Lineares Sortieren: Counting Sort

- Beispiel für einen Algorithmus, der kein Vergleichssortieren ist
- man braucht zusätzliche Information
- Counting Sort: Information daß der Wertebereich der Elemente endlich ist: $1 \ldots, k$ mit $k = O(n)$.

$\Rightarrow$ Zählen der Elemente $= i$ möglich (im Hilfsarray $C[1 \ldots k]$)

- kein *Vergleich* im Algorithmus

Counting Sort

```
Counting-Sort(A,B,k)
  for i := 1 to k do C[i] := 0;

  for j := 1 to length[A]
  do  C[A[j]] := C[A[j]] + 1  /* C[i]: Anzahl der Elemente = i */

  for i := 2 to k             /* Erlaubter Input von 1...k     */
  do  C[i] := C[i] + C[i-1];  /* C[i]: Anzahl Elemente <= i    */

  for j := length[A]  downto  1
  do
       B[C[A[j]]] :=   A[j];  /* C[A[j]] gibt Pos. in B        */
         C[A[j]]  := C[A[j]] - 1;
  od;
```

Analyse von Counting Sort

1. erste Schleife: $O(k)$
2. zweite Schleife:$O(n)$
3. dritte Schleife: $O(n)$

- Insgesamt: $O(k+n)$, und falls $k = O(n) \Rightarrow$ lineare Laufzeit: $O(n)$

Bucketsort

- Annahme von Bucketsort: uniforme Verteilung der Eingabe im Intervall $I = [0, 1[$
- Teilung von I in n Unterintervalle (Buckets)
  1. Verteilen der Elemente in die Buckets
  2. Sortieren der Buckets
  3. Aneinanderhängen der sortierten Teillisten

```
BucketSort(A)
  n := length(A);

  for i=1 to n
    do insert A[i] into list B[floor (n * A[i])];

  for i=0 to n-1
    do sort list B[i] with insertion sort;

  concatenate lists B[0], B[1], B[n-1] together;
```

Bucketsort: Analyse

- Alles linear bis auf Insertionsort = quadratisch
- Zufallsvariable n_i: Anzahl der Elemente in $B[i]$.
- Insertionsort quadratisch $\Rightarrow$ erwarteter Gesamtaufwand:

$$\sum_{i=0}^{n-1} O(\mathcal{E}(n_i^2)) = O\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\mathcal{E}(n_i^2)\right)$$

- Verteilung von n_i: Binomialverteilung $B(k, n, p = 1/n)$

$$P(n_i = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- $\mathcal{E}(n_i) = 1$ und $Var(n_i) = 1 - \frac{1}{n}$.
- $\mathcal{E}(n_i^2) = Var(n_i) + \mathcal{E}(n_i)^2 = 2 - \frac{1}{n} = O(1)$

$\Rightarrow$

$$T(n) = O(n)$$

Lektion IV

Analyse

Literatur: Verschiedene Kapitel aus [CLR90]. Daneben Abschnitt 2.5 aus [Heu97].

Inhalt: Analyse von Divide and Conquer ·

Laufzeitanalyse für Divide & Conquer

- Aufstellen einer Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = O(1) \quad \text{für } n \leq n_0$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{a} T(n_i) + D(n) + C(n) \quad \text{für } n > n_0$$

- $T(n)$: Laufzeit für Problem der Größe n, D und C Kosten für das Divide resp. Conquer
- Vereinfachung: Teilprobleme gleichgroß, $n_0 = 1$. ferner $f(n) := D(n) + C(n)$.

$\Rightarrow$ T(n) = a T(n/b) + f(n) $a \geq 1$, $b > 1$ konstant

- Beispiel: Merge-Sort:
  - Zwei rekursive Aufrufe $a = 2$
  - Halbierung der Problemgröße: $b = 2$
  - Kosten des Mergens: $O(n)$.

Lösen der Rekurrenzgleichung

Sei $n = b^k$. Auflösen durch Iteration.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&= a^2T(\frac{n}{b^2}) + af(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&\dots \\
&= a^kT(\frac{n}{b^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= a^{\log_b n}\, T\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= a^{\log_b n}\, T(1) + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= d\, n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(\frac{n}{b^i})
\end{aligned}
$$

- Sei $f(n) = D(n) + C(n)$ linear, $f(n) = cn$.

Spezialfall: lineare Zeitkomplexität

- Summe der Größen der Teilprobleme $(a\frac{n}{b})$ echt kleiner

$\Rightarrow$ $a < b$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= d\ n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= d\ n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} c a^i \frac{n}{b^i} \\
&= d\ n^{\log_b a} + cn \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \left(\frac{a}{b}\right)^i \\
&\leq O(n)
\end{aligned}
$$

Spezialfall: $O(n \log n)$

- Summe der Größen der Teilpobleme gleich Größe des Ausgangsproblems

$\Rightarrow$ $a = b$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= d\, n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} c a^i \frac{n}{b^i} \\
&= d\, n^{\log_b a} + cn \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \left(\frac{a}{b}\right)^i \\
&= d\, n + cn \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} 1 \\
&\leq O(n \log n)
\end{aligned}
$$

- Beispiel: Mergesort

Spezialfall: polynomiale Laufzeit

- Summe der Größen der Teilpobleme größer als das Ausgangsproblem

$\Rightarrow$ $a > b$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= d\, n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} c \left(\frac{a}{b}\right)^i \\
&\leq d\, n^{\log_b a} + cn \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_b n} - 1}{\frac{a}{b} - 1} \\
&\leq O\left(n^{\log_b a} + n \left(\frac{a}{b}\right)^{\log_b n}\right) \\
&\leq O\left(n^{\log_b a} + n \frac{a^{\log_b n}}{b^{\log_b n}}\right) \\
&\leq O\left(n^{\log_b a}\right)
\end{aligned}
$$

Lektion V

Elementare Datenstrukuren

Literatur: Kapitel 11 [CLR90].

Inhalt: Stacks und Queues · verzeigerte Listen · Bäume · Implementierungsmöglichkeiten

Einleitung

- „dynamische Mengen“: veränderbar
- viele verschiedene Variante
- Unterschieden nach
  - Zugriffsmöglichkeiten (Schnittstelle)
  - Repräsentierung
- zwei Arten von Zugriffen
  - modifizend
  - lesend (*queries*)
- Beispiele für Zugriffe:
  - Suchen
  - Einfügen, Löschen
  - Minumium, Maximum bestimmen
  - Vorläufer, Nachfolger bestimmen
  - ...
- Beispiele für Repräsentierungen:
  - (einfach o. doppelt) verzeigerte Listen
  - Bäume unterschiedlichster Art (balanciert, Heaps ...)
  - Hashstrukturen

Stacks und Queues

- Stack/Queue: dynamische (Multi-)Mengen mit spezifischer Strategie zum Einfügen und Löschen:
  - Stack: Lifo: *last-in, first-out*
    - *Push*: Einfügen
    - *Pop*: Entfernen
  - Queue: Fifo: *first-in, first-out*
    - *Enqueue*: Einfügen
    - *Dequeue*: Entfernen

Stack als Array

- Implementiert als Array $1 \ldots n$
- dynamischer Inhalt: Elemente $S[1], \ldots S[top]$
- Komplexität: $O(1)$

```
Stack-empty(S)
  if top == 0 then return true else false;

Push(S,x)
  top    := top + 1;
  S[top] := x;

Pop(S)
  if Stack-empty(S)
  then error "underflow"
  else top  := top  -1;
       return S[top+1];
```

Queues als Array

- Array als Ringpuffer (*circular buffer*)
- zwei Pointer: *head* and *tail*: erste benutzte und erste freie
- Komplexität: $O(1)$

```
Enqueue(Q,x) =
  Q[tail] := x;
  if tail == length(Q)
     then tail := 1       // start again with 1
     else tail := tail + 1;


Dequeue(Q) =
  x := Q[head]
  if head == length(Q)
     then head := 1        // start again with 1
     else head := head + 1
  return x;
```

Verzeigerte Listen

- lineare Datenstuktur
- keine wahlfreier Zugriff wie beim Array, sonder über Zeiger
- Verschiedene Varianten:
  - *einfach* verzeigert: nur $prev$
  - *doppelt* verzeigert: $prev$ und $next$
  - *zirkulär*

Verzeigerte Listen (2)

Operation	Komplexität
Einfügen	$O(1)$
Löschen (bei geg. Element)	$O(1)$
Suchen	$O(n)$

verzeigerte Listen (3)

```
List-search(L,k)     // k: key
  x  := head
  while  x != nil and x.key != k
     do  x := next(x);

  return x;
```

```
List-insert(L,x)             // vorne Einfuegen
  next(x) := head;
  if head != nil then prev(head) := x
     head := x
  prev(x) := nil

List-delete(L,x)
  if prev(x) != nil
     then next(prev(x)) := next(x)
     else          head := next(x)
  if next(x) != nil
     then prv(next(x)) := prev(x);
```

6. Mai 1999

Lektion VI

Hashstrukturen

Literatur: Kapitel 12 aus [CLR90]. Hashfunktionen werden auch in [Knu73b] diskutiert.

Inhalt: Hashstrukturen · Hashing mit externer Verkettung · Hashing mit offener Adressierung · Hashfunktionen

Einleitung

- drei Operationen eines Wörterbuches (*dictionaries*)
  - Suchen
  - Einfügen
  - Entfernen
- Hashtabellen: effizient zur Implementierung von

Adreßtabellen mit direktem Zugriff

- implementiert mit Arrays
- Zugriff direkt über den Index = Schlüssel (key, eindeutig)
- Suchen, Einfügen, Entfernen: in konstanter Zeit ($O(1)$).

```
Search(T,k)   = return T[k];

Insert(T,x)   = T[key(x)] := x;

Delete(T,x)   = T[key(x)] := nil;
```

- Problem:
  - machbar nur für kleine Bereiche der Schlüssel, Platzverschwendung
  - nur destruktives Einfügen möglich

$\Rightarrow$ Hashtabellen

Hashtabelle

- Verallgemeinerung von Arrays mit direkten Zugriff
- gegeben: Bereich U der Schlüssel ("Universum")
- hash-Funktion: $h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$
  - $|U| > m$

  $\Rightarrow$ h nicht injektiv $\Rightarrow$ Kollision
  - $h(k)$: Hashwert von k
  - "zufällige" Funktion

Kollisionsauflösung: Verkettung

- Verkettung (*chaining*, auch *external chaining*)
- Bild
- Varianten: Eindeutiger Schlüssel, implementierbar durch
  - Überschreibendes Einfügen, oder
  - Löschen nur mittels key (`Delete(k)`) und Löschen von allen Elementen mit passendem key, search gibt nur den ersten Treffer zurück.

```
Insert(T,x) = T[h(key(x))] := insert x at the head of T[h(key)];

Search(T,k) = Search for an element with key k in T[h(k)];

Delete(T,x) = Delete x  from list  T[h(k)];
```

Analyse

Definition 2 (Belegungsfaktor) Der *Belegungsfaktor* α (*load factor*) einer Hashtabelle $T[0, \ldots m-1]$ ist definiert als

$$\alpha = \frac{n}{m},$$

wobei n gleich die Anzahl der gespeicherten Elemente ist.

- Worst-case: alle Elemente mit dem selben Schlüssel $\Rightarrow O(n)$
- im Mittel:
  - Annahme: Gleichverteilung = einfaches, uniformes Hashing
  - Hashfunktion $h(k)$ mit konstantem Aufwand $O(1)$

  $\Rightarrow$ Suchen nach Element mit Schlüssel k: linear in der Länge von $T[h(k)]$

Satz 3 Das erfolgreiche sowie erfolglose Suchen in einer Hashtabelle mit Verkettung und unter der Annahme einfachen, uniformen Hashings benötigt $O(1+\alpha)$ Zeitaufwand.

Analyse (2)

Beweis: Unterscheidung in *erfolglose* und *erfolgreiche* Suche.

Fall 1: erfolglos

- eine Liste wird bis *zum Ende* durchsucht
- durchschnittliche Länge der Listen: $\alpha = \frac{n}{m}$

$\Rightarrow$ $O(1 + \alpha)$

Fall 2: erfolgreich
Annahmen:

- alle Schlüssel gleichwahrscheinlich, kein Schlüssel doppelt
- Einfügen am Ende
- Ansatz: Suchen nachdem der Schlüssel eingefügt ist kostet eins mehr als davor

$\Rightarrow$ Durchschnitt: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i-1}{m}\right) = \ldots 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}$

$\Rightarrow$ $O(1 + \alpha)$ $\square$

Hashfunktionen

- Ziel: Gleichverteilung von $h(k)$:

$$\sum_{\{k|h(k)=j\}} P(k) = \frac{1}{m}$$

- falls keys gleichverteilt aus $[0, 1[\Rightarrow$

$$h(k) = \lfloor km \rfloor \in \{0, \ldots, m-1\}$$

- ansonsten: Heuristiken

Divisionsmethode	$h(k) = k \mod m$
Multiplikationsmethode	$h(k) = \lfloor m(kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor$ (mit $0 < A < 1$)
Universal hashing	"zufällige" Auswahl von h

- wichtig: Auswahl der Parameter, abhängig auch von den keys
  - Divisionsmethode: m prim, möglichst nicht nahe 2er-Potenz
  - Multiplikation: m egal

Offene Adressierung

- alle Elemente in der Hashtabelle gespeichert (keine Pointer, keine *externen* Listen) $\Rightarrow$ Verkettung wird errechnet
- Belegungsfaktor ≤ 1
- Sondierung ($probe$): Suche nach freiem Slot

$\Rightarrow$ Hashfunktion

$$h : U * \{0, \ldots m-1\} \rightarrow \{0, \ldots, m-1\}$$

- Sondierungs-Sequenz ($probe\ sequence$) für Schlüssel k:

$$(h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1))$$

- gute Hashfunktion: Vermeidung von Häufungen ($clusters$)

Offene Adressierung: Hashfunktionen

- lineares Probing
  - gegeben: $h' : U \to \{0, \ldots m-1\}$: gewöhnliche Hashfunktion

$$h(k,i) = ((h'(k) + i) \mod m)$$

  - Probe-Sequenz: $T[h'(k), h'(k)+1, \ldots]$
  - Problem: primäre Häufung
- Quadratisches Probing
  - h' wie oben

$$h(k,i) = ((h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \mod m)$$

- Doppeltes Hashing
  - gute Methode
  - h_1, h_2: zwei gewöhnliche Hashfunktionen

$$h(k,i) = (h_1(k) + i h_2(k)) \mod m$$

  - $h_2(k)$ sollte relativ prim zu m sein!

20. Mai 1999

Lektion VII

Binäre Bäume

Literatur: Kapitel 13 aus [CLR90]. *Balancierte* Bäume stammen aus [AVL62].

Inhalt: Binäre Bäume · Baumoperationen

Einleitung

- Unterstützung vieler Wörterbuchoperationen
- Baumstrukturen *effizient*
- Effizienz der Operationen proportional Höhe des Baumes $=$ $O(\log n)$ (falls der Baum "ausgeglichen")
- Viele Varianten, abhängig von der Anwendung
  - Rot/Schwarz-Bäume [Bay72]
  - B-Bäume
  - AVL-Bäume [AVL62]
  - Splay-Trees
  - (a, b)-Bäume, z.B. $(2, 3)$-Bäume (2-3-Bäume)
  - selbst-balancierende Bäume
  - ...

Binäre Suchbäume

Definition 4 (Binärer Suchbaum) Ein *binärer Suchbaum* ist ein binärer Baum (*left*, *right*, (evtl. *parent*)) bei dem für alle Knoten n gilt:

$$key(l) \leq key(n) \leq key(r).$$

wobei l und r beliebige Knoten aus dem rechten bzw. linken Unterbaum von n sind

- Die Elemente des Baumes sind "sortiert"

$\Rightarrow$ Ausgeben der sortierten Elemente = rekursives Durchlaufen des Baumes (*in-order tree walk*)[4]

```
InOrder-Tree-Walk(t) =
  if   t != nil
  then InOrder-Tree-Walk(left(t));
       print (key(t));
       InOrder-Tree-Walk(right(t));
```

[4] es gibt daneben Durchlaufen in *Präordnung* und *Postordnung*.

Baumoperationen: Suchen

- wichtige Operation auf Suchbäumen
- Komplexität: $O(h)$, wobei h die Höhe
- Minimum/Maximum bestimmen: genauso einfach (der linkeste/rechteste Knoten im Baum)

```
Search(t,k) =                  // t : tree, k : key
  if         t == nil    then raise error("Not found")
  else if    k == key(t) then return t
  else if    k <  key(t)
       then Search( left(t),k)
       else Search(right(t),k)
```

Baumoperationen: Suchen (2)

Hier das Ganze nochmals iterativ

```
Search(t,k) =                  // t : tree, k : key
  while (t != nil) and (k != key(t))
  do
    if k < key(t)
       then t :=  left(t)
       else t := right(t)
  od;
  if   (t == nil)
  then raise error("Not Found")
  else return t
```

Baumoperationen: Einfügen

- Einfügen immer an den Blättern
- Komplexität: $O(h)$

```
Insert(T,z) =                  // T : tree, z : node to insert
  y := nil; x := root(T);      // zwei Hilfsvariablen
  while  x != nil
  do
    y := x;
    if   key(z) < key(x)
    then x := left(x)
    else x := right(x)
  od;
  p(z) := y;                   // x ist nil, y sein Vorgaenger
  if   y = nil
  then root(T) := z
  else if   key(z) < key(y)
       then  left(y) := z
       else right(y) := z
```

Baumoperationen: Löschen

- Komplexität: $O(h)$
- Problem:
  - Erhalt der Baumeigenschaft: innere Knoten müssen ersetzt werden
  - Erhalt der Sortierungseigenschaft: der Ersatz muß passen
- Bild
- Baumnachfolger eines Knotens x: Nachfolger in der in-order-Baumordnung
  - falls Knoten mit rechtem Kind:

  $\Rightarrow$ Nachfolger $=$ der "linkeste" Knoten im rechten Teilbaum.

  $\Rightarrow$ Nachfolger hat kein linkes Kind!

  $\Rightarrow$ $key(left(x)) \leq key(x) \leq key\,succ(x) \leq key(right(x))$[5]

  $\Rightarrow$ Nachfolger ersetzt zu löschenden inneren Knoten

[5] Wenn die Schlüssel alle unterschiedlich sind, gilt für die beiden ersten Ungleichungen schärfer $<$ anstelle $\leq$. Die erste Ungleichung gilt nur falls das linke Kind existiert.

```
Delete(T,z)            // T = tree, z = zu loeschender Knoten
  if   left(z) = nil or right(z) = nil
    then y := z              // y tritt an die Stelle von x
    else y := Successor(z);  // wobei: y hat nur ein Kind

  if left(y) != nil          // Bestimmung des Kindes x
     then x :=  left(y)
     else x := right(y);

  if x != nil then p(x) = p(y);

  if p(y) = nil
    then root(t) = x
    else if  y = left(p(y))
           then  left(p(y)) := x
           else right(p(y)) := x  // y ist nun  vom
                                  //  urspr. Platz entfernt


  if y != z then key(z) := key(y);

  return y;
```

Lektion VIII

Rot-schwarz-Bäume

Literatur: Kapitel 13 aus [CLR90]. Die Rot/Schwarz-Bäume wurden von [Bay72] eingeführt.

Inhalt: Rot/schwarz-Bäume · Rotation · Erhalt der Rot-Schwarzeigenschaft bei Einfügen und Löschen

Einführung

- Hauptproblem der Suchbäume: Effizienz hängt von der Höhe ab

$\Rightarrow$ je balanzierter desto besser der Baum

Definition

Definition 5 rot/schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit einem Bit Zusatzinformation: der Farbe und folgenden Bedingungen:

- jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz
- Blätter (nil) sind schwarz
- die Kinder eines roten Knotens sind schwarz
- jeder einfache Pfad von einem gegebenen Knoten zu einem Blatt enthält die selbe Anzahl an schwarzen Knoten

- Bild
- Schwarzhöhe $bh(x)$ eines Knotens: die Anzahl der schwarzen Knoten auf den Pfaden (ausschließlich x) zu den Blättern

Lemma 6 Ein rot-schwarz Baum mit n internen Knoten hat eine Höhe von höchstens $2 \lg(n+1)$.

$\Rightarrow$ die Operationen Suchen, Minimum, Maximum, Successor, Predecessor: $O(\lg n)$.

- Einfügen und Löschen?

Rotation

- Rotation
- Erhalt der In-Ordnung der Schlüssel
- Komplexität $O(1)$
- Bild

Rotation(2)

```
Rotate-l(t,x) =                          // t = Baum, x = Knoten
s  if   (x = nil) or (right(x) = nil)
  then
       raise error "illegal rotation"
  else    y := right(x);                 // rette y
       p(y) := p(x);
       if   y != nil
       then right(x) := left(y);
       if   (left(y)) != nil
       then p(left(y)) := x;

       left(y):= x                       // x != nil
       if   root(t) == x
       then root(t) := y
       else if   x == left(p(x))         // p(x) definiert
            then  left(p(x)) := y
            else right(p(x)) := y


       p(x)  := y;                       // zum Schluss
```

Einfügen

- Zunächst Einfügen wie im gewöhnlichen binären Suchbaum

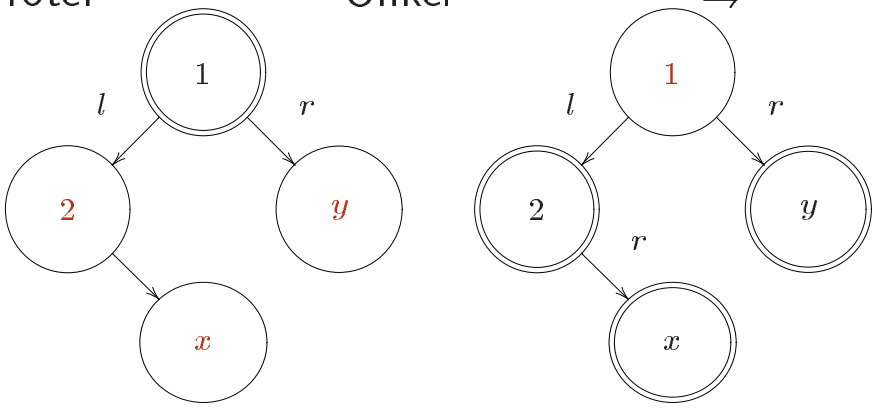
$\Rightarrow$ neues rotes Blatt.

  - keine Schwarz-Verletzung, aber u. U.
  - Rot-Verletzung

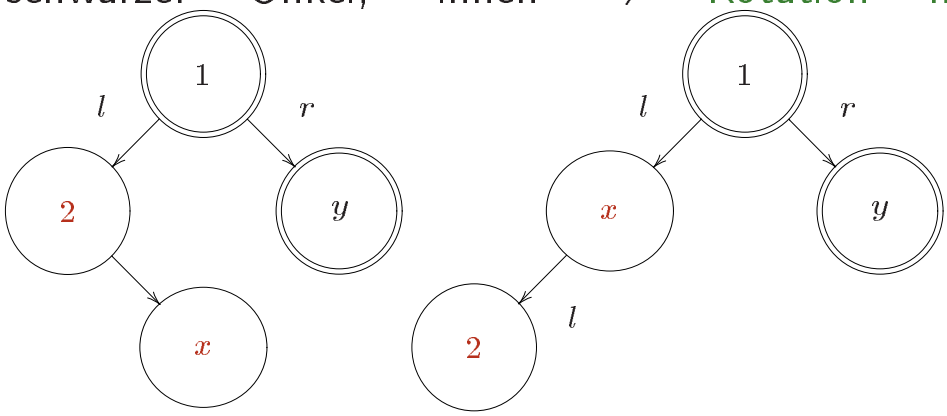
- Bei rot-Verletzung:
  - Reparieren durch Umfärben und Rotation
  - keine Neueinführung von Schwarzverletzungen

Einfügen: drei Fälle (+ 3 symmetrische)

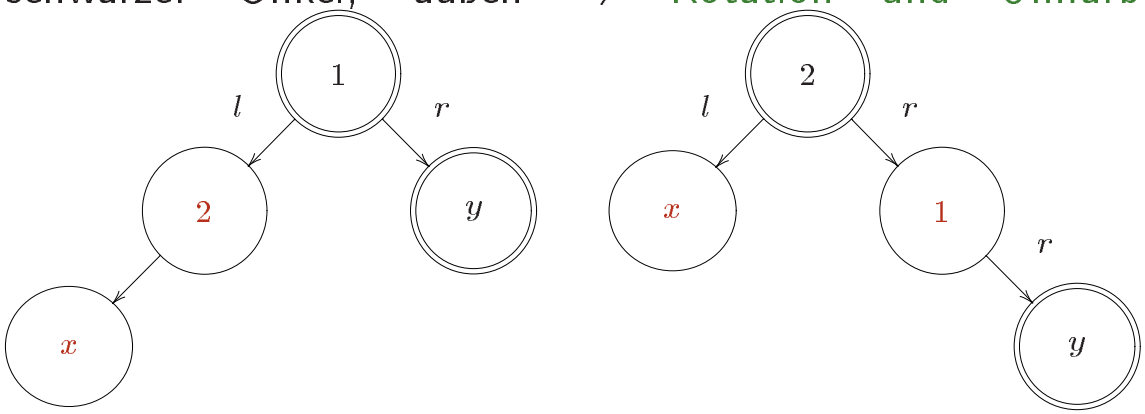
1. roter Onkel $\Rightarrow$ Umfärben



2. schwarzer Onkel, innen $\Rightarrow$ Rotation nach außen



3. schwarzer Onkel, außen $\Rightarrow$ Rotation und Umfärben



Einfügen (3)

```
insert(T,x)
  tree_insert(T,x);                              // normal einfuegen
  color(x)  := red                               // am Anfang rot

  while x != root(t) and color(p(x)) = red       // Rot-verletzung
  do
    if  p(x) = left(p(p(x));                     // Vater ist linker Sohn
       then  y := right(p(p(x))                  // y = Onkel, d.h.
                                                 // rechter Sohn des Opas
             if  color(y) = red                  // Onkel rot
                then  color(p(x))  := black; // => umfaerben
                      color(y)     := black;
                     color(p(p(x)) := red;
                                 x := p(p(x))
                else if x = right(p(x))          // Onkel schwarz
                        then x := p(x);          // x ist rechtes Kind
                             left_rotate(T,x)

                     color(p(x)) := black;   // Vater <- schwarz
                     color(p(p(x)) := red;   // Opa   <- rot
                    right_rotate(T,p(p(x))); // Ausgleich

       else ..... // analog
  done;
  color(root(T)) := black;
```

Löschen

27. Mai 1999

Lektion IX

Graphen

Literatur: Kapitel 23 aus [CLR90]. Der Algorithmus für die starken Zusammenhangskomponenten ist von Tarjan [Tar72].

Inhalt: Graphen · Repräsentierungen · Erreichbarkeit · Breitensuche · Tiefensuche · backtracking · topologisches Sortieren · Berechnung starker Zusammenhangskomponenten

Graphen

Repräsentierung von Graphen

Erreichbarkeitsproblem

Suchstrategiere

Breiten- & Tiefensuche

Breitensuche

Korrektheitsargument

3. Juni 1999

Tiefensuche

- Suche zunächst in die Tiefe[6]
- Wie bei Breitensuche: Farben zur Suchsteuerung
  1. Weiß: ungesehen
  2. Grau: entdeckt
  3. Schwarz: fertig
- anstelle von Queue: Stack
- "Backtracking"
- Teilgraph der Vorgänger $G_\pi = (V, E_\pi)$:

$$E_\pi = \{(\pi(v), v) \mid v \in V, \pi(v) \neq \perp\}$$

$\Rightarrow$ Menge von Tiefensuchbäumen (= Tiefensuchwald, *depth-first forest*)

- Zusatzinformation: Zeitstempel $d[v]$ *(discovered)* und $f[v]$ *(finished)* wobei $d[v] < f[v]$.

[6] der vorgestellte Algorithmus wendet dies auf alle Knoten der Reihe nach an, das ist aber nicht zentral. Die eigentliche Tiefensuche ist *DFS-Visit*.

Algorithmus

```
DFS(G)
  for each vertex v in V[G]
  do
     color[u] := white;
      pred[u] := nil;
  od
  time := 0;                        // Ende der Initialisierung
  for each vertex u in V[G]
  do
      if color[u] = white then DFS-Visit(u);


DFS-visit(u)
  color[u] := gray;                 // Knoten entdeckt
  time := time + 1;  d[u] := time;
  for each v in Adj[u]              // erkunde Kante (u,v)
  do  if   color[v] = white
      then pred[v] := u
           DFS-visit(v)
  od;
  color[u] := black;                // u ist fertig
  time := time + 1; f[u] := time;
```

Tiefensuche: Analyse

- Bild 23.5(1)
- Komplexität:
  - $O(V)$ für DSF
  - $O(E)$ für $DFS\text{-}Visit$

  $\Rightarrow$ Laufzeit für Tiefensuche: $O(E+V)$

Weitere Eigenschaften

Proposition 7 (Klammerung) Gegeben zwei Knoten u, v aus $G = (V, E)$. Es gilt genau eine der folgenden Bedingungen:

1. $[d[u], f[u]]$ ist echtes Teilintervall von $[d[v], f[v]]$, u ist Nachfahre von v in Tiefensuchbaum
2. Symmetrisch.
3. $[d[u], f[u]]$ und $[d[v], f[v]]$ disjunkt

$\Rightarrow$ Verschachtelung der Intervalle:

Korollar 8 Knoten v ist echter Nachfolger von u im Tiefensuchwald gdw. $d[u] < d[f] < f[f] < f[u]$

- Klassifikation von Kanten:
  - Baumkante: Kanten des Tiefensuchwaldes
  - Rückwärtskante: Kanten von Nachfahren zu Vorfahren in einem Tiefensuchbaum (inkl. Selbst-Schleifen)
  - Vorwärtskante: Kante von Vorfahren zu Nachfahren gemäß einen Tiefensuchbaumes, die nicht im Baum sind
  - Querkante: alle anderen

Topologisches Sortieren

- Anwendung der Tiefensuche
- algorithmische Umsetzung der bekannten Tatsache: jede Halbordnung läßt sich zu einer totalen/linearen Ordnung erweitern.
- Graphdarstellung einer Halbordnung: DAG

Definition 9 (DAG) Ein gerichteter, azyklischer Graph (DAG) ist ein gerichteter Graph ohne Zyklen, d.h., es für alle Knoten $u, v \in V$ gilt: Wenn $u \rightarrow^+ v$, dann $u \neq v$.

- Eine topologische Sortierung eines DAGs G is eine lineare Ordung der Knoten von G, Kompatibilität: falls (u, v) eine Kante auf G, dann $u < v$ in der linearen Ordnung.
- d.h. keine Sortieren wie bei den Sortieralgorithmen
- Bild
- Lineare Ordnung = Zeitstempel der Schwarzfärbung

Topologisches Sortieren (2)

- Eingabe: DAG („=“ Halbordnung), Ausgabe: verzeigerte Liste („=“ lineare Ordnung)

```
Topological-Sort(G)                    // G ist ein DAG

  call DFS(G) to compute  finishing-times f[v] for all v;
  as each vertex is finished, insert it onto the front of a list;
  return the linked list
```

- Komplexität: Laufzeit $O(V + E)$.

Topologisches Sortieren (3)

Satz 10 (Weiße Pfade) Gegeben Graph G. Im Tiefensuchwald für G gilt: v ist Nachfahre von u gdw. zur Zeit $d[u]$ der Knoten v durch u auf einem weißen Pfad erreichbar ist.

Lemma 11 Ein gerichteter Graph ist azyklisch gdw. die Tiefensuche keine Rückwärtskanten produziert.

Beweis: Fall 1: $\Leftarrow$
Sei G zyklisch $\Rightarrow$ es gibt einen Zyklus c: $w \rightarrow^+ w$. Sei v der erste entdeckte Knoten aus c und u sein Vorgänger im Zyklus. Zur Zeit $d[v]$: weißer Pfad $v \rightarrow^* u$ $\Rightarrow$ u wird Nachfolger im Tiefensuchwald $\Rightarrow$ Behauptung

Fall 2: $\Rightarrow$
DFS findet Rückwärtskante (v, u), andererseits $u \rightarrow^* v$ mittels Baumkanten (weil u Vorgänger von v im Tiefensuchbaum) $\square$

Lemma 12 (Korrektheit) Der Algorithmus angewandt auf einen DAG, liefert eine topologische Sortierung.

Beweis: Prüfen der Kompatibilität: falls $u \rightarrow^+ v$ in G, dann $f[u] < f[v]$. Sei (u, v) eine Kante. Wenn sie mit DFS erkundet wird, ist v nicht Grau (sonst wäre v ein Vorfahre $\Rightarrow$ Rückwärtskante) $\Rightarrow$ v ist weiß oder schwarz.

Fall 1: v weiß

v wird Nachfahre von $u \Rightarrow f[v] < f[u]$

Fall 2: v schwarz

Dann sofort $f[v] < f[u]$ □

17. Juni 1999

Starke Zusammenhangskomponenten

- klassische Anwendung der DFS: Zerlegen eines Graphen in stark-zusammenhängende Komponenten

Definition 13 (Starker Zusammenhang) Gegeben $G = (V, E)$. Eine *starke Zusammenhangskomponente* von G ist eine maximale Knotenmenge $U \subseteq V$ mit: für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt $u_1 \rightarrow^* u_2$ und $u_2 \rightarrow^* u_2$.

- Idee: zweimaliges Anwenden von DFS, auf G und auf den transponierten Graphen[7] G^t
- Komplexität: lineare Zeitkomplexität $O(E + V)$

[7] Sei $G = (V, E)$ gegeben, dann ist $G^t = (V, E^t)$ wobei $(v, u) \in E^t$, gdw. $(u, v) \in E$. die starken Zusammenhangskomponenten von G und G^t stimmen überein.

Algorithmus

```
Strongly-connected-components(G)      // G: gerichteter Graph

  call DFS(G) to compute finishing times f[u] for each vertex;

  compute G_t = transpose(G)          // transponiere G

  call DFS(G_t), but in the main loop of DFS,
       consider the vertices in order of
       decreasing f[u]

  output the vertices of each tree in the depth-first forest
      from the previous step a a separated strongly connected
      component.
```

Analyse

- Vorvater $\phi(u)$ eines Knoten u ist derjenige Knoten w mit $u \rightarrow^* w$ und maximalen $f[w]$.

Lemma 14 Der Vorvater $\phi(u)$ bzgl. einer Tiefensuche ist ein Vorgänger von u,

Korollar 15 Für alle Knoten u gilt: u und $\phi(u)$ liegen in der selben starken Zusammenhangskomponente.

Beweis: Folgt direkt aus dem vorangegangenen und der Definition von Vorvater. □

Analyse (2)

- es gilt also: für jede SCC ist der Vorvater
  - der erste Knoten der entdeckt wird und
  - der letzte Knoten der beendet wird!

$\Rightarrow$ die starke Zusammenhangskomponente von r sind diejenigen Knoten die von r in G^t erreichbar sind.

24. Juni 1999

Lektion X

Spannbäume

Literatur: Kapitel 24 aus [CLR90].

Inhalt: Kantengewichte · minimale Spannbäume · *greedy*-Strategien · Kruskals Algorithmus · Prims Algorithmus

Minimaler Spannbaum

- Motivation: Verknüpfung[8] einer geg. Anzahl von Knoten mit minimalen Kosten (Verkabelung, Routing, . . .)
- Verknüpfung von n Knoten: mit $n - 1$ Kanten
- Kosten: modelliert als „Kantengewicht“
- Gegeben:
  - $G = (V, E)$ ungerichtet, verbunden, und mit $E \subseteq V \times V$ Menge potentieller Verbindungen
  - Kantengewicht: $w : V^2 \to \mathbb{R}^+$.
- Gesucht: $T \subseteq E$ sodaß
  - azyklisch (Baum)
  - Verbindung aller Knoten (*aufspannend*, *spanning*)
  - minimale Kosten

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$$

  minimal.

$\Rightarrow$ Problem des minimalen Spannbaums

- Beispiel für greedy-Strategie
- Bild

[8] jeder von jedem erreichbar.

Spannbaumalgorithmus

- greedy-Strategie:
  - Heuristik für Optimierungsprobleme
  - falls eine Entscheidung zu treffen ist: entscheide dich für den augenblicklich beste Alternative (ohne auf mögliche Nachfolge-Vorteile zu achten)
- iterativer Aufbau eines minimalen Spannbaumes

$\Rightarrow$ schrittweises Hinzufügen von Kanten.

Definition 16 Sei A Teilmenge eines minimalen Spannbaumes für G. Eine Kante (u, v) ist sicher für A, falls $A \cup \{(u, v)\}$ Teilmenge eines minimalen Spannbaumes ist.

```
Generic-MST(G,w) =
  A := 0;
  while A does not form a spanning tree
    do
      find an edge (u,v) that is safe for A
      A := A + {(u,v)}
     od
  return A
```

Sichere Kanten

- Problem: wie findet man sichere Kanten?

Definition 17 Ein Schnitt $(S, V - S)$ (cut) eines ungerichteten Graphen ist eine Partition von V. Eine Kante kreuzt den Schnitt, if ein Endpunkt ist in S und der andere in $V - S$. Eine Kante, die einen Schnitt kreuzt, ist leicht falls ihr Gewicht von allen kreuzenden Kanten minimal ist.[9]

Theorem 18
- $G = (V, E)$ zusammenhängend, ungerichtet, mit reellwertiger Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.
- $A \subseteq E$, A Teil eines min. Spannbaumes
- $(S, V - S)$: Schnitt der A respektiert
- (u, v): leichte Kante, die den Schnitt $(S, V - S)$ kreuzt

$\Rightarrow$ (u, v) sicher für A.

[9] man kann

minimaler-Spannbaum-Algorithmus

- während der Algo läuft: A immer azyklisch (Invariante)

$\Rightarrow$ $G_A = (V, A)$ Wald

- zu Beginn: Wald mit $|V|$ (einknotigen) Bäumen
- jede hinzugefügte sichere Kante verknüpft zwei Bäume

$\Rightarrow$ Schleife $|V| - 1$-mal durchlaufen

Korollar 19 • $G = (V, E)$ zusammenhängend, ungerichtet, Gewichtungsfunktion $W : E \to \mathbb{R}$.

- $A \subseteq E$, A Teil eines min. Spannbaumes
- C eine Zusammenhangskomponente (hier Baum) im Wald $G_A = (V, A)$.

Es gilt: Wenn (u, v) eine leichte Kante ist die C mit einer anderen Komponente verbindet, dann ist (u, v) sicher für A.

Kruskals Algorithmus

- Spezialisierung des generischen Algorithmus'
- greedy-Strategie
- Umsetzung des Korollars 19

$\Rightarrow$ sichere Kante = die mit dem geringsten Gewicht, die zwei Bäume verbindet.

- Hilfsfunktionen + Hilfsdatenstrukturen:
  - Wald = disjunkte Mengen/Partition (von Knoten)
  - `find-set`: finde Repräsentanten
  - `Union`: Vereinigung
  - `Makeset`: ein-elementige Menge

Kruskal (2)

```
mst-kruskal(G,w)
  A := 0;                                  // A: Kantenmenge
                                           // Invariante: A Teil
                                           // eines min. Spannbaumes
  for each v in V[G] do Make-Set(v) od; // Wald aus lauter Knoten

  sort the edges of E by non-decreasing weight w;

   for each edge (u,v) in E (in order)
   do
      if   Find-Set(u) != Find-Set(v)   // u,v nicht im selben Baum?
      then A := A + {(u,v)};            // fuege Kante u--v hinzu
           Union(u,v);                  // vergroebere die Partition
      fi;
   od;
   return A;
```

Kruskal (3)

- Laufzeit von Kruskal:
- hängt von der Implementierung der Hilfsstukturen ab

Initialisierung	$O(V)$
Sortieren	$O(E \log(E))$
innere Schleife	$O(E)$
Datenrepräsentierung	$\alpha(E, V)$.

$\Rightarrow$ $O(E \log(E))$[10]

[10] unter der Vorraussetzung, daß $\alpha(E, V) = O(\log E)$, z.B., heap-Implementierung.

Prims Algorithmus

- Spezialisierung des generischen Algorithmus'
- A: kein Wald, sondern ein einzelner Baum[11]
- Wachsen des Baumes startend von beliebiger Wurzel r
- Baum bestimmt den Schnitt

$\Rightarrow$ Iterationsschitt: füge leichte Kante vom Baum nach außerhalb des Baumes hinzu

- greedy: mit jedem schritt wird der Baum minimal schwerer
- Datenstruktur
  - Ordnen der Knoten außerhalb des Baumes

  $\Rightarrow$ Priority Queue (z.b. wieder mittels Heap)

[11] genauer: alle andern Bäume des Waldes sind nur Einzelknoten.

Prim (2)

```
mst-prim(G,w,r)                    // G = Graph, w = Gewichtung,
                                   // r: Wurzel
  Q := V(G);                       // priority queue von Knoten
                                   // Q = Knoten noch nicht im Baum

  for each u in Q do key[u] := infinity od;

  key[r] := 0;
  p(r)   := nil;                   // r hat kein parent
  while  Q != empty
  do
    u := extract_min(Q);           // u wird den Baum hinzugefuegt
    for each v in Adj(u)
    do
       if   v in Q and w(u,v) < key(v)
       then p(v)   := u;           // parent
            key(v) := w(u,v)
       fi
    od
  od
```

Lektion XI

Kürzeste Pfade

Literatur: Teile von Kapitel 25/26 aus [CLR90].

Inhalt: Einleitung · Varianten · Relaxation · Dijkstras Algorithmus · Bellman-Ford. · lineare Programmierung

Einleitung

- Motivation: Routing
- gegeben: gerichteter Graph mit Gewichtungsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$
- Problem: finde einen Verbindung/Pfad mit minimalen Kosten

Definition 20 (Kürzester Pfad) Gegeben $G = (V, E)$ gerichteter Pfad, $w : E \to \mathbb{R}$. Das Gewicht eines Pfades $p = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ ist definiert:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i).$$

Das Gewicht des kürzesten Pfades von u nach v ist das Minimum:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \xrightarrow{p} v\} & \text{falls } \exists \text{ Pfad von } u \text{ nach} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein kürzester Pfad von u nach v ist ein Pfad von u nach v mit $w(p) = \delta(u, v)$.

Varianten

- spezifizierte Quelle ($single\text{-}source$): finde einen kürzesten Pfad von einem gegeben Knoten für jeden Zielknoten
- spezifiziertes Ziel: ($single\text{-}destination$): duales Problem
- spezifizierte Quelle und Ziel ($single\text{-}pair$)
- kürzeste Pfade für alle Knotenpaare.

Kürzeste Pfade

- Hauptidee:

  Der kürzeste Pfad zwischen zwei Knoten
  enthält kürzeste Pfade als Teile

$\Rightarrow$ gutartiges Problem, viele Techniken anwendbar
  - greedy
  - Relaxation
  - dynamsiche Programmierung....

Lemma 21 geg $G = (V, E)$, gerichtet, gewichtet mit $w : E \to \mathbb{R}$. $v_1, \ldots, v_n)$ ist ein kürzester Pfad von v_1 nach v_n und $w = (v_i, \ldots v_j)$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ ein Teilpfad. Dann is w ein kürzester Pfad von v_i nach v_j.

$\Rightarrow$ Zerlegung: Sei $s \to^* v$ kürzester Pfad mit $s \to^* u \to v$, dann $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$.

- „Dreiecksungleichung“
  - $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$ (mit $(u, v) \in E$)
  - $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + \delta(u, v)$

Relaxation

- Methode zur Optminierung bei gutartigen Probleme
- pessimistische (worst-case) Abschätzungen,
- im Laufe des Algos immer weiter verbessert
- gutartig: "monoton", neue Information verbessern die Schätzung nur
- für kürzeste Pfade: für alle $v \in V$: $\delta(v)$ als obere Schranke für den Pfad von s nach v.

Relaxation (2)

- Relaxationsalgorithmus
  - Initialisierung: für all $v \in V$:
    * $d(v) = \infty$ (außer s)
    * $d(s) = 0$
    * $\pi(V) = \perp$
  - Relaxierung einer Kante: Anwendung der Dreiecksungleichung:

```
Relax(v_1, v_2) =
  if d(v_2) > d(v_1) + w(v_1,v_2)
  then   pi(v_2)  := v_2
         d(v_2)  := d(v_1) + w(v_1,v_2)        // v
```

  - Unterschiedliche allgorithmen, je nachdem wann und wieoft Kanten relaxiert werden.

Dijkstra

- Voraussetzung: nicht-negative Gewichtung
- Greedy-strategie: relaxiere immer eine Kante zu dem unbehandelten Knoten mit dem geringsten Abschätzung des Abstandes.

$\Rightarrow$ Hilfsstuktur: Priority Queue

- Graphsuche, gesteuert nach den besten Abschätzungen, Ähnlich Breitensuche
- Laufzeitkomplexität:
  - Jeder Knoten einmal aus der Queue genommen: $O(V^2)$[12]
  - jede Kante genau einmal relaxiert: $O(E)$

  $\Rightarrow$ $O(V^2 + E) = O(V^2)$.

[12] extrahieren kostet $O(V)$, wenn man nicht noch Zusatzannahmen macht.

Dijkstra (2)

```
Dijkstra(G,w,s)
  Intitialise(G,s);          /* siehe Folien                  */
  S := emtpyset;             /* Knoten mit bekannter Distanz */
  Q := V;                    /* priority queue                */

  while Q != empty
  do
    u := extract-min(Q);
    S := S + {u};
    for each vertext v  in Adj(u)
    do
        relax(u,v)
    od
  od
```

Bellmann-Ford

- beliebige Kantengewichtung, entdeckt negativ-gewichtete Zyklen
- Relaxation der Abschätzung des Abstandes.
- Laufzeitkomplexität: $O(VE)$.

Bellmann-Ford (2)

```
Bellmann-Ford(G,w,s)                    // G = (V,E), Gewichtung w

  initialize(G,s);                      // Siehe Vorlesung
  for i := 1 to size(V)-1
  do
    for each edge (u,v) in E
    do
      relax(u,v)
    od
  od;
  for each edge (u,v) in E              // Test auf negative Zyklen
  do
    if d(v) > d(u) + w(u,v)
       then return false
       else return true
  od;
```

Lineare Programmierung

- spezielles Optimierungsproblem
- Gegeben:
  - lineare Zielfunktion $+$
  - Menge von linearen Ungleichungen ($contraints$)
- Gesucht: Eingabe, sodaß Zielfunktion mit optimaler/minimaler Wert.
- genauer:
  - gegeben
    - $Ax \leq b$
    - $f(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_1 x_i$
  - gesucht: minimiere $f(x_1 \ldots x_n)$
- berühmtes Lösungsverfahren: Simplex-Verfahren (und andere)
- Eingeschränkt hier: Differenzenungleichungen, d.h. Ungleichungen der Form:[13]

$$x_i - x_j < b_k$$

[13] jede Reihe der Matrix enthält eine 1 und eine -1 und ansonsten nur 0.

Darstellung als Graphproblem

- Gegeben: Differenzenungleichungen: $Ax \leq b$.
- Definiere Constraintgraph $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{v_1, \ldots v_n\}$ (ein Extraknoten v_0!)
  - $E = \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \leq b_k\} \cup \{(v_1, v_1), (v_0, v_n)\}$. Die Gewichte $W(v_i, v_j) = b_k \ \ (i, j \neq 0)$ und die Gewichte der von v_0 ausgehenden Kanten $= 0$.
-

Lektion XII

Schluß

Literatur: Verschiedenes aus [CLR90] oder ähnlichem. Vorallem Kapitel 36. Dazu Kapitel 11 aus [HU79].

Inhalt:

Harte Probleme

- Bisher nur: leichte Problem (Komplexitätsmäßig): Laufzeit $O(n^k)$ (polynomiell, of quadratisch)
- Techniken für leichte Probleme
  - Greedy: entschiede Dich immer für den augenblicklich Größten Gewinn
  - Divide-and-Conquer: zerlege das Problem in unabhängige Teilprobleme und löse diese rekursiv
  - Relaxation
  - viele andere:
    * dynamische Programmierung: "Verallgemeinerung" von divide-an-conquer
    * branch-and-bound
- inhärent harte Probleme
  - einfachen Strategien scheitern, keine effizienten Lösungen bekannt
  - oft Optimierungsprobleme
  - praktisch relevant: Plazierungen, Scheduling, Kostenminimierung, Probleme aus der Logik, Netzwerkdesign, Zahlentheorie . . .

NP-Vollständigkeit

- berühmte Klasse schwerer Probleme
- Status unbekannt, wichtiges offenes Problem
  - gibt es eine polynomielle Lösung für derartige Probleme oder
  - gibt es eine nicht-polynomielle untere Abschätzung

$$NP = P \text{ oder } NP \neq P$$

Komplexitätsklasse NP

- Formales Modell: Turingmaschinen o.ä.
- Unterscheidung
  - determinisch (DTIME) oder
  - nicht-deterministische (NTIME) Komplexität
- Beispiel: $\mathrm{DTIME}(n)$: linear

Definition 22 (NP) Die Komplexitätsklasse NP ist die Klasse von Problemen, die nichtdeterministisch-polynomiell gelöst werden kann.

- Alternativ: NP enthält die Probleme, die polynomiell verifiziert werden können
- $P = \bigcup \mathrm{DTIME}(n^i)$
- $P = \bigcup \mathrm{NTIME}(n^i)$
- ähnliche Klasse auch für Speicherkomplexität (DSPACE, NSPACE)

Reduzierbarkeit und NP-Vollständigkeit

- Reduktion: Vergleich der "Schwere" von Algorithmen
- analog der Reduktion unentscheidbarer Probleme
- hier: Komplexität der Übersetzung muß mit berücksichigt werden.

Definition 23 (Polynomielle Reduktion) Ein Problem L_1 (Sprache) ist reduzierbar in polynomieller Zeit auf L_2 ($L_1 \leq_p L_2$, wenn es einen in polynomieller Zeit berechenbare Algorithmus (Turingmaschine, ...) f gibt sodaß: $x \in L_1$ gdw. $f(x) \in L_2$.

$\Rightarrow$ Definition von NP-vollständigen Probleme: die "maximalen" in NP.

Definition 24 (NP-vollständig) Eine Problem L aus der Klasse NP ist NP-vollstängig, falls sich alles Probleme aus der Klasse NP sich polynomiell auf L reduzieren lassen.

Beispiele

- berechtigte Frage: gibt es NP-vollständige Probleme?
  - Erfüllbarkeit von Boolescher Logik/Schaltkreisen
  - Problem des Handlungsreisenden
  - Hamiltonsche Graphen, Max-Clique, ...

Problem des Handlungsreisenden

- TSP: berühmtes NP-vollständiges Problem
- gegeben:
  - vollständiger Graph (Knoten = "Städte")
  - $c : V \times V \to \mathbb{Z}$ ("Distanz")
- Gesucht: Teilgraph $G' = (V', E')$ als Kreis mit $V' = V$ und minimalen Kosten ("beste Rundreise") (alternativ: gibt es eine Rundreise mit Kosten $\leq k$)

15. Juli 1999

Literatur

[AVL62] G. M. Adel'son-Vel'skiĭ and E. M. Landis. An algorithm for the organization of information. *Soviet Mathematics Doklady*, 3:1259–1263, 1962.

[Bay72] R. Bayer. Symmetric binary B-trees: Data structure and maintenance algorithms. *Acta Informatica*, 1:290–306, 1972.

[CLR90] Thomas H. Cormen, Charles E. Leierson, and Ronald L. Rivest. *An Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1990.

[Heu97] Volker Heun. Grundlegende Algorithmen. Vorlesungsskript TU München, October 1997.

[HU79] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley, 1979.

[Knu73a] Donald Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

[Knu73b] Donald Knuth. *Sorting and Searching*, volume 3 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

[Tar72] Robert Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1(2):146–160, June 1972.