



## Informatik IV

Sommersemester 1999

Serie 12\*

12. Juli 1999

### Aufgabe 1

(4 Punkte)

- (a) Sei  $L$  eine reguläre Sprache und  $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  ein Homomorphismus (d.h. eine Funktion  $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  derart, daß  $h(\varepsilon) = \varepsilon$  und für alle  $u, v \in \Sigma^*$  gilt:  $h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$ ). Zeigen Sie, daß  $h(L)$  regulär ist.
- (b) Zeige oder widerlege: Für alle regulären Sprachen  $L$  ist  $h^*(L)$  regulär mit

$$h^*(L) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \geq 0} h^i(L) .$$

### Aufgabe 2

(5 Punkte)

In dieser Aufgabe wird gezeigt, daß es kontextfreie Sprachen gibt, die nicht linear sind. Lineare Sprachen werden von Grammatiken erzeugt, die nur Regeln der Form  $A \rightarrow w_1 B w_2$ ,  $A \rightarrow w$  haben, wo wie immer nur  $S \rightarrow \varepsilon$  erlaubt ist. Zeigen Sie hierzu:

- (a) Jede lineare Sprache kann von einer Grammatik mit Regeln der folgenden Form erzeugt werden:  $A \rightarrow aB$ ,  $A \rightarrow Bc$ ,  $A \rightarrow a$  (und evtl.  $S \rightarrow \varepsilon$ ).
- (b) Ist  $G$  eine lineare Grammatik, so existiert ein  $n$ , so daß für alle  $z \in L(G)$  mit  $|z| \geq n$  gilt: Es gibt  $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ ,  $vx \neq \varepsilon$ ,  $|uvxy| \leq n$ ,  $uv^iwx^iy \in L(G)$  für  $i \geq 0$ .
- (c) Die Sprache  $\{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \geq 0\}$  ist kontextfrei, aber nicht linear.

### Aufgabe 3

(5 Punkte)

Sprachen, die durch einen DPDA akzeptiert werden (mit Endzuständen), heißen deterministisch kontextfrei. Sei  $L$  deterministisch kontextfrei und  $R$  regulär. Zeigen Sie, daß  $L \cdot R$  deterministisch kontextfrei ist. Die notwendige Konstruktion und Erläuterung der wichtigsten Fälle ist ausreichend (vollständiger Beweis nicht notwendig).

### Aufgabe 4

(5 Punkte)

Ein Zwei-Keller-PDA geht aus einem PDA durch Hinzufügen eines weiteren Kellers hervor; das Kelleralphabet und das Kellerstartsymbol werde für beide Keller benutzt. Eine Transition hat also die Form

$$(q, a/\varepsilon, Y, Z, \lambda, \delta, q'),$$

sie besagt, daß der Automat im Zustand  $q$  nach dem Lesen von  $a$  bzw.  $\varepsilon$  in  $q'$  übergeht und die beiden oberen Kellerbandinschriften  $Y$  und  $Z$  durch  $\lambda$  und  $\delta$  ersetzt werden.

Das Akzeptieren von Wörtern wird wie bei PDA's definiert: Ein Wort  $w$  wird genau dann akzeptiert, wenn  $(q_0, w, Z_0, Z_0) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$  für ein  $q \in Q$  gilt.

Zeigen Sie: Wird eine Sprache  $L$  von einer Turing-Maschine erkannt, so auch von einem Zwei-Keller-PDA.

### Aufgabe 5

(4 Punkte)

Diese Aufgabe soll zeigen, daß es Turing-entscheidbare Sprachen gibt, die nicht kontextsensitiv sind. Hinweis: Betrachten Sie die Aufzählung aller kontextsensitiven Grammatiken und verwenden Sie Diagonalisierung.

**Ausgabe:** 13. Juli 1999

**Abgabe:** 20. Juli 1999, bis 10.30 Uhr *im Schreiben*