

Übung 6:

Ausgabetermin: 1. Juni 1999

Abgabe: 8. Juni 1999

Aufgabe 1: [Logische Konsequenz und Deduktionstheorem]

Wir haben in der Vorlesung das Deduktionstheorem für ein prädikatenlogisches Hilbert-System kennengelernt, die entscheidende Richtung lautete: Wenn $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$, dann $\Gamma \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$, wobei alle vorkommenden Formeln geschlossen sind, allerdings Parameter enthalten können. Das \vdash_H steht dabei für die Ableitbarkeit in dem gegebenen Hilbertsystem. Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls bedeuten, daß er mit dem Begriff der semantischen Folgerung \models übereinstimmt.

Falls man in der Hypothesenmenge Γ und in φ freie Variable zuläßt, hat man, was \models betrifft, zwei Wahlmöglichkeiten (beide finden sich in der Literatur):

1. $\Gamma \models \varphi$, falls für alle Modelle \mathcal{M} und alle Variablenzuweisungen A gilt: Wenn $\mathcal{M}, A \models \Gamma$, dann $\mathcal{M}, A \models \varphi$, oder
2. $\Gamma \models \varphi$, falls für alle Modelle \mathcal{M} : Wenn $\mathcal{M} \models \Gamma$, dann $\mathcal{M} \models \varphi$.¹

In einer der beiden Definitionen gilt das Deduktionstheorem, wie oben angegeben, semantisch nicht (in welcher?). Schlagen Sie für diesen Fall eine Modifikation des Deduktionstheorems und der Generalisierungsregel vor, die es für die Definition der semantischen Folgerung passend macht.

Aufgabe 2: [Existentielle Quantifizierung]

In dem Hilbertsystem der Vorlesung haben wir die Generalisierungsregel für γ -Formeln kennengelernt, allerdings keine Regel für δ -Formeln. Eine Regel dafür könnte, dual zur Generalisierungsregel, lauten:

$$\frac{\delta(p) \rightarrow \psi}{\delta \rightarrow \psi}$$

wobei p ein Parameter ist der weder in $\delta \rightarrow \psi$ noch, falls man aus einer Hypothesenmenge Γ ableitet, in Γ vorkommt.

Zeigen Sie, daß diese Regel aus den anderen Regeln des Hilbertsystems *ableitbar* ist.

¹Zur Erinnerung: $\mathcal{M} \models \varphi$, falls $\mathcal{M}, A \models \varphi$ für alle Zuweisungen A .