

# CTL Modelchecking

## Model Checking,

### Seminar im Wintersemester 2004/05

Carsten Krapp

26.11.2004

Nach einem Buch von: E. M. Clarke, O. Grumberg, and D. Peled.  
Model Checking. MIT Press, 1999

## Definition (Model Checker).

Ein Model Checker ist ein **Algorithmus**, der den Zustandsraum eines System nach unspezifizierten Abläufen durchsucht. <sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Prof. Dr. Armin Biere, Institut für Computersysteme, ETH Zurich

## Warum brauchen wir Modelchecker?

- ▶ Es ist nicht möglich, alle Systeme anhand ihres Input-Output-Verhaltens zu modellieren.
- ▶ Kritische Anwendungen dürfen nicht versagen und können eventuell nicht getestet werden unter Realbedingungen (Echtzeitsysteme, Sicherheitskritische Anwendungen)
- ▶ Müssen beweisen können, dass bestimmte Situationen eintreten bzw. nicht eintreten können.

## Der Mars Rover „Spirit“

When the Mars rover Spirit went dark on Jan.21 (2003)...



*„That appeared to fix the problems that had been identified with the initial load. But the new load also made possible a totally implausible sequence of events that would, many months later, silence Spirit...“*

Dieses Missgeschick hat sicherlich einige Millionen Dollar gekostet und hätte verhindert werden können.

# Eigenschaften eines Systems

## Zustand, Transition und Valuation

- ▶ Ein **Zustand** ist die Beschreibung des System durch die Werte der Variablen zu der bestimmten Zeit.
- ▶ Eine **Transition** ist der Übergang von einem Zustand zu einem Folgestatus
- ▶ Sei  $V$  die Menge der Systemvariablen über einem Wertebereich  $D$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist eine Funktion, die jeder Variable aus  $V$  einen Wert aus  $D$  zuordnet.

## Die Kripke Struktur

Sei  $AP$  eine Menge von atomaren Propositionen. Eine **Kripke Struktur**  $M$  über  $AP$  ist ein Viertupel  $M = (S, S_0, R, L)$  mit folgenden Eigenschaften:

- ▶  $S$  ist eine endliche Menge von Zuständen, d.h. die Menge aller Valuationen für  $V$ .
- ▶  $S_0 \subseteq S$  ist die Menge der Anfangszustände, bzw. die Menge aller Valuationen  $s_0$  für  $V$ , die  $S_0$  erfüllen.
- ▶  $R \subseteq S \times S$  ist eine totale Relation.  $R = \{(s, s') \mid \forall v \in V, v' \in V' : v \leftarrow s(v) \Rightarrow v' \leftarrow s'(v), s, s' \in S\}$ .
- ▶  $L : S \rightarrow 2^{AP}$  ist eine Funktion, die jedem Zustand diejenigen atomaren Propositionen zuweist, die in ihm wahr sind.

## Beispiel

Sei  $V = \{x, y\}$ ,  $D = \{0, 1\}$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist ein Paar  $(d_1, d_2) \in D \times D$ . Das System bestehe nur aus der Transition  $x := (x + y) \bmod 2$  mit dem Startzustand  $x = 1, y = 1$ . Die Menge der Anfangszustände wird dann durch  $S_0(x, y) \equiv x = 1 \wedge y = 1$  dargestellt und es gilt  $R(x, y, x', y') \equiv x' = (x + y) \bmod 2 \wedge y' = y \Rightarrow$  Dann erhalten wir folgende **Kripke Struktur**  $M = (S, S_0, R, L)$ :

## Beispiel

Sei  $V = \{x, y\}$ ,  $D = \{0, 1\}$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist ein Paar  $(d_1, d_2) \in D \times D$ . Das System bestehe nur aus der Transition  $x := (x + y) \bmod 2$  mit dem Startzustand  $x = 1, y = 1$ . Die Menge der Anfangszustände wird dann durch  $S_0(x, y) \equiv x = 1 \wedge y = 1$  dargestellt und es gilt  $R(x, y, x', y') \equiv x' = (x + y) \bmod 2 \wedge y' = y \Rightarrow$  Dann erhalten wir folgende **Kripke Struktur**  $M = (S, S_0, R, L)$ :

- ▶  $S = D \times D$



## Beispiel

Sei  $V = \{x, y\}$ ,  $D = \{0, 1\}$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist ein Paar  $(d_1, d_2) \in D \times D$ . Das System bestehe nur aus der Transition  $x := (x + y) \bmod 2$  mit dem Startzustand  $x = 1, y = 1$ . Die Menge der Anfangszustände wird dann durch  $S_0(x, y) \equiv x = 1 \wedge y = 1$  dargestellt und es gilt  $R(x, y, x', y') \equiv x' = (x + y) \bmod 2 \wedge y' = y \Rightarrow$  Dann erhalten wir folgende **Kripke Struktur**  $M = (S, S_0, R, L)$ :

- ▶  $S = D \times D$
- ▶  $S_0 = \{(1, 1)\}$

## Beispiel

Sei  $V = \{x, y\}$ ,  $D = \{0, 1\}$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist ein Paar  $(d_1, d_2) \in D \times D$ . Das System bestehe nur aus der Transition  $x := (x + y) \bmod 2$  mit dem Startzustand  $x = 1, y = 1$ . Die Menge der Anfangszustände wird dann durch  $S_0(x, y) \equiv x = 1 \wedge y = 1$  dargestellt und es gilt  $R(x, y, x', y') \equiv x' = (x + y) \bmod 2 \wedge y' = y \Rightarrow$  Dann erhalten wir folgende **Kripke Struktur**  $M = (S, S_0, R, L)$ :

- ▶  $S = D \times D$
- ▶  $S_0 = \{(1, 1)\}$
- ▶  $R = \{((1, 1), (0, 1)), ((0, 1), (1, 1)), ((1, 0), (1, 0)), ((0, 0), (0, 0))\}$

## Beispiel

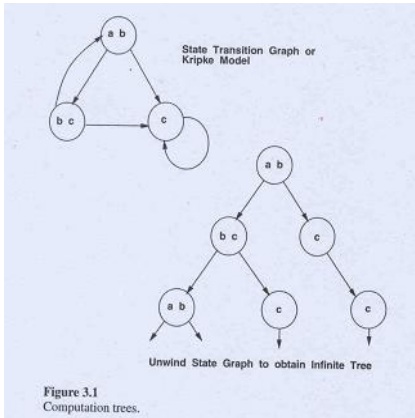
Sei  $V = \{x, y\}$ ,  $D = \{0, 1\}$ . Eine **Valuation** für  $V$  ist ein Paar  $(d_1, d_2) \in D \times D$ . Das System bestehe nur aus der Transition  $x := (x + y) \bmod 2$  mit dem Startzustand  $x = 1, y = 1$ . Die Menge der Anfangszustände wird dann durch  $S_0(x, y) \equiv x = 1 \wedge y = 1$  dargestellt und es gilt  $R(x, y, x', y') \equiv x' = (x + y) \bmod 2 \wedge y' = y \Rightarrow$  Dann erhalten wir folgende **Kripke Struktur**  $M = (S, S_0, R, L)$ :

- ▶  $S = D \times D$
- ▶  $S_0 = \{(1, 1)\}$
- ▶  $R = \{((1, 1), (0, 1)), ((0, 1), (1, 1)), ((1, 0), (1, 0)), ((0, 0), (0, 0))\}$
- ▶  $L((1, 1)) = \{x = 1, y = 1\}$ ,  $L((0, 1)) = \{x = 0, y = 1\}$ ,  
 $L((1, 0)) = \{x = 1, y = 0\}$ ,  $L((0, 0)) = \{x = 0, y = 0\}$

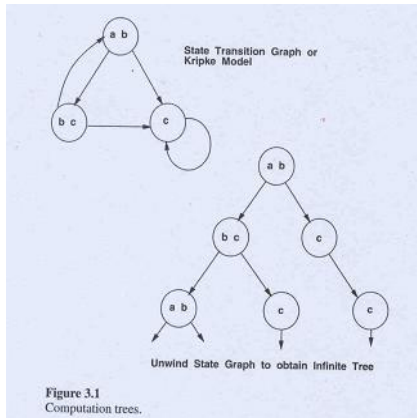
## CTL\* (Computation Tree Logic)

- ▶ Die **CTL\*** Formeln beschreiben Eigenschaften eines **Berechnungsbaumes**
- ▶ Die Wurzel des Baumes ist ein Zustand einer **Kripke Struktur**
- ▶ Der **Berechnungsbaum** gibt alle möglichen Ausführungen an, die von der Wurzel aus erreichbar sind.
- ▶ CTL\*-Formeln bestehen aus **Pfadquantoren** und **Temporalen Operatoren**
- ▶ Die Pfadquantoren beschreiben die Struktur des Berechnungsbaumes
- ▶ Die Temporalen Operatoren geben die Eigenschaften eines Pfades im Baum an

# Pfadquantoren



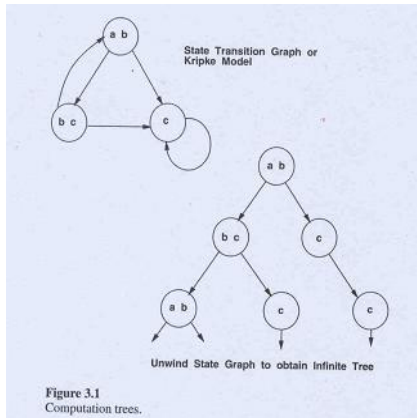
## Pfadquantoren



Es gibt zwei Pfadquantoren. Sie geben an, ob von einem Zustand aus alle oder einige Pfade eine gewisse Eigenschaft besitzen.

- ▶ **A** („Für alle Berechnungspfade“)

## Pfadquantoren



Es gibt zwei Pfadquantoren. Sie geben an, ob von einem Zustand aus alle oder einige Pfade eine gewisse Eigenschaft besitzen.

- ▶ **A** („Für alle Berechnungspfade“)
- ▶ **E** („Für manche Berechnungspfade“)

# Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:



# Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:

- ▶ **X** (eine Eigenschaft soll im nächsten Zustand des Pfades gelten)

# Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:

- ▶ **X** (eine Eigenschaft soll im nächsten Zustand des Pfades gelten)
- ▶ **F** (Es gibt einen Zustand im Pfad, der die geforderte Eigenschaft erfüllt)

# Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:

- ▶ **X** (eine Eigenschaft soll im nächsten Zustand des Pfades gelten)
- ▶ **F** (Es gibt einen Zustand im Pfad, der die geforderte Eigenschaft erfüllt)
- ▶ **G** (eine Eigenschaft gilt in allen Zuständen des Pfades)

## Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:

- ▶ **X** (eine Eigenschaft soll im nächsten Zustand des Pfades gelten)
- ▶ **F** (Es gibt einen Zustand im Pfad, der die geforderte Eigenschaft erfüllt)
- ▶ **G** (eine Eigenschaft gilt in allen Zuständen des Pfades)
- ▶ **U** (es gibt einen Zustand der eine gewisse Eigenschaft erfüllt und in allen anderen Zuständen auf dem Pfad gilt eine bestimmte andere Eigenschaft.)

## Temporale Operatoren

Es gibt fünf Basisoperatoren:

- ▶ **X** (eine Eigenschaft soll im nächsten Zustand des Pfades gelten)
- ▶ **F** (Es gibt einen Zustand im Pfad, der die geforderte Eigenschaft erfüllt)
- ▶ **G** (eine Eigenschaft gilt in allen Zuständen des Pfades)
- ▶ **U** (es gibt einen Zustand der eine gewisse Eigenschaft erfüllt und in allen anderen Zuständen auf dem Pfad gilt eine bestimmte andere Eigenschaft.)
- ▶ **R** (eine Eigenschaft gilt bis zu einem Zustand, in dem auch eine weitere Eigenschaft gilt)

## Syntax von CTL\*-Formeln

Es gibt zwei Arten von Formeln in CTL\*

1. Zustandsformeln, die in einem gegebenen Zustand wahr sind.
2. Pfadformeln, die auf einem gegebenen Pfad wahr sind

Syntax für die Zustands- und Pfadformeln:

- ▶ Ist  $p \in AP$ , dann ist  $p$  eine Zustandsformel.
- ▶ Sind  $f$  und  $g$  Zustandsformeln, dann auch  $\neg f$ ,  $f \vee g$  und  $f \wedge g$ .
- ▶ Ist  $f$  eine Zustandsformel, dann ist  $f$  auch eine Pfadformel.
- ▶ Ist  $f$  eine Pfadformel, dann sind  $\mathbf{E} f$  und  $\mathbf{A} f$  Zustandsformeln.
- ▶ Sind  $f$  und  $g$  Pfadformeln, so sind  $\neg f$ ,  $f \vee g$ ,  $f \wedge g$ ,  $\mathbf{X} f$ ,  $\mathbf{F} f$ ,  $\mathbf{G} f$ ,  $f \mathbf{U} g$  und  $f \mathbf{R} g$  Pfadformeln.

## Semantik von CTL\*-Formeln

Sei  $M=(S,R,L)$  eine **Kripke Struktur**,  $f_1, f_2$  Zustandsformeln,  $g_1, g_2$  Pfadformeln und bezeichne  $\pi^i$  das Suffix eines Pfades  $\pi$  mit Startzustand  $s_i$ , dann definieren wir eine Relation  $\models$  induktiv:

- ▶  $M, s \models p \Leftrightarrow p \in L(s)$
- ▶  $M, s \models \neg f_1 \Leftrightarrow M, s \not\models f_1(s)$
- ▶  $M, s \models f_1 \vee f_2 \Leftrightarrow M, s \models f_1$  or  $M, s \models f_2$
- ▶  $M, s \models f_1 \wedge f_2 \Leftrightarrow M, s \models f_1$  and  $M, s \models f_2$
- ▶  $M, s \models \mathbf{E} g_1 \Leftrightarrow$  es ex. ein Pfad  $\pi$  von  $s$ , so dass  $M, \pi \models g_1$
- ▶  $M, s \models \mathbf{A} g_1 \Leftrightarrow$  jeder Pfad  $\pi$  von  $s$ , so erfüllt  $M, \pi \models g_1$

## Semantik von CTL\*-Formeln

- ▶  $M, \pi \models f_1 \Leftrightarrow i$  ist der erste Zustand von  $\pi$  und  $M, s \models f_1$
- ▶  $M, \pi \models \neg g_1 \Leftrightarrow M, \pi \not\models g_1(s)$
- ▶  $M, \pi \models g_1 \vee g_2 \Leftrightarrow M, \pi \models g_1$  or  $M, \pi \models g_2$
- ▶  $M, \pi \models g_1 \wedge g_2 \Leftrightarrow M, \pi \models g_1$  and  $M, \pi \models g_2$
- ▶  $M, \pi \models \mathbf{X} g_1 \Leftrightarrow M, \pi^1 \models g_1$
- ▶  $M, \pi \models \mathbf{F} g_1 \Leftrightarrow$  es gibt ein  $k \geq 0$ , so dass  $M, \pi^k \models g_1$
- ▶  $M, \pi \models \mathbf{G} g_1 \Leftrightarrow$  für alle  $i \geq 0$ , gilt  $M, \pi^i \models g_1$
- ▶  $M, \pi \models g_1 \mathbf{U} g_2 \Leftrightarrow$  es gibt ein  $k \geq 0$ , so dass  $M, \pi^k \models g_2$  und für alle  $0 \leq j < k$ , gilt  $M, \pi^j \models g_1$
- ▶  $M, \pi \models g_1 \mathbf{R} g_2 \Leftrightarrow$  für alle  $j \geq 0, i < j$  :  
 $M, \pi^i \not\models g_1 \Rightarrow M, \pi^j \models g_2$



## CTL (Computation Tree Logic)

CTL ist eine Teilmenge von CTL\*. Auf jeden der temporalen Operatoren **X**, **F**, **G**, **U**, **R** muß sofort eine Pfadangabe folgen.

- ▶ Sind  $f$  und  $g$  Zustandsformeln, dann sind **X**  $f$ , **F**  $f$ , **G**  $f$ ,  $f$  **U**  $g$  und  $f$  **R**  $g$  Pfadformeln.

# CTL (Computation Tree Logic)

Es gibt zehn Basisoperatoren:

- ▶ **AX** und **EX**
- ▶ **AF** und **EF**
- ▶ **AG** und **EG**
- ▶ **AU** und **EU**
- ▶ **AR** und **ER**

# CTL (Computation Tree Logic)

Es gibt zehn Basisoperatoren:

- ▶ **AX** und **EX**
- ▶ **AF** und **EF**
- ▶ **AG** und **EG**
- ▶ **AU** und **EU**
- ▶ **AR** und **ER**

Beispiel:

**AG(EF Neustart)**

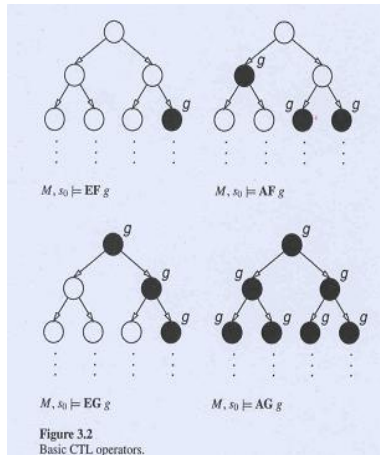
# CTL (Computation Tree Logic)

Es gibt zehn Basisoperatoren:

- ▶ **AX** und **EX**
- ▶ **AF** und **EF**
- ▶ **AG** und **EG**
- ▶ **AU** und **EU**
- ▶ **AR** und **ER**

Beispiel:

**AG(EF Neustart)**



## LTL (Linear Temporal Logic)

LTL ist eine Teilmenge von CTL\* bei der die Operatoren die Ereignisse beschreiben, die auf einem einzelnen Berechnungspfad eintreten können.

- ▶ Ist  $p \in AP$ , dann ist  $p$  eine Pfadformel
- ▶ Sind  $f, g$  Pfadformeln, so auch  $\neg f, f \vee g, f \wedge g, \mathbf{X} f, \mathbf{F} f, \mathbf{G} f, f \mathbf{U} g$  und  $f \mathbf{R} g$ .

Es kann gezeigt werden, dass die LTL Formel  $\mathbf{A}(\mathbf{FG}p)$  nicht in CTL und dass die CTL Formel  $\mathbf{AG}(\mathbf{EF}p)$  nicht in LTL ausgedrückt werden kann. Somit kann die CTL\*Formel  $\mathbf{A}(\mathbf{FG}p) \vee \mathbf{AG}(\mathbf{EF}p)$  weder in CTL noch in LTL ausgedrückt werden.

## Fairness-Bedingungen

Manchmal ist es nicht nur wichtig, die Korrektheit auf einem Berechnungspfad zu zeigen, sondern auch dass Fairness-Bedingungen eingehalten werden.

## Fairness-Bedingungen

Manchmal ist es nicht nur wichtig, die Korrektheit auf einem Berechnungspfad zu zeigen, sondern auch dass Fairness-Bedingungen eingehalten werden.

- ▶ Fairness kann nicht direkt in CTL abgebildet werden aber in CTL\*



## Fairness-Bedingungen

Manchmal ist es nicht nur wichtig, die Korrektheit auf einem Berechnungspfad zu zeigen, sondern auch dass Fairness-Bedingungen eingehalten werden.

- ▶ Fairness kann nicht direkt in CTL abgebildet werden aber in CTL\*

⇒ Veränderung der Semantik von CTL wird notwendig. Wir nennen die neue Semantik von CTL **faire Semantik**.

## Fairness-Bedingungen

Ein Pfad heißt **fair**, wenn jede Fairness-Bedingung unendlich oft auf einem Pfad gilt.

- ▶ eine faire **Kripke Struktur** ist ein Viertupel  $M = (S, R, L, F)$ , mit  $F \subseteq 2^S$  als Menge der Fairness-Bedingungen.
- ▶  $\text{inf}(\pi) = \{s \mid s = s_i \text{ für unendlich viele } i\}$
- ▶  $\pi$  ist fair  $\Leftrightarrow \forall P \in F : \text{inf}(\pi) \cap P \neq \emptyset$
- ▶ Wir schreiben  $M, s \models_F f$  wenn die Zustandsformel  $f$  wahr ist im Zustand  $s$  einer fairen Kripke Struktur.
- ▶ Wir schreiben  $M, \pi \models_F g$  wenn die Pfadformel  $g$  wahr ist für einen Pfad  $\pi$  in einer fairen Kripke Struktur  $M$ .

## CTL Model Checking

Um herauszufinden, welche Zustände  $S$  einer Kripke Struktur  $M = (S, R, L)$  eine CTL Formel  $f$  erfüllen, benutzen wir folgenden Algorithmus:

- ▶ Markiere jeden Zustand  $s$  mit der Menge  $label(s)$  von Teilformeln von  $f$ , die in  $s$  wahr sind.
- ▶ Wir beginnen mit  $label(s) = L(s)$ .
- ▶ Nun wird  $L(s)$  induktiv in Subformel aufgeteilt und diese werden  $label(s)$  hinzugefügt.
- ▶ Terminiert der Algorithmus, so gilt  $M, S \models f$  iff  $f \in label(s)$

# CTL Model Checking

Es gilt:

- ▶ Jede CTL Formel kann durch die Terme  $\neg, \vee, \mathbf{EX}, \mathbf{EU}, \mathbf{EG}$  dargestellt werden

# THEOREM 1.

Es gibt einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein CTL Formel  $f$  in einem Zustand  $s$  einer Kripke Struktur  $M = (S, R, L)$  wahr ist, der Laufzeit  $\mathcal{O}(|f| \cdot (|S| + |R|))$  hat.

## Markierungsalgorithmen

- ▶ Die Markierung für Formeln der Art  $\neg f$ ,  $f \vee g$ , **EX**  $f$  erfolgt kanonisch.
- ▶ Für Formeln der Art  $g = \mathbf{E}[f_1 \mathbf{U} f_2]$  suche zunächst alle Zustände, die mit  $f_2$  markiert sind. Gehe „zurück“ mit  $R^{-1}$  und markiere alle Zustände, die man über einen Pfad, in dem alle Zustände mit  $f_1$  markiert sind, mit  $g$ .  
 Der Algorithmus *CheckEU* benötigt offensichtlich  $\mathcal{O}(|S| + |R|)$  Zeit.

## Der CheckEU-Algorithmus

```

procedure CheckEU( $f_1, f_2$ )
     $T := \{ s \mid f_2 \in \text{label}(s) \}$ ;
    for all  $s \in T$  do  $\text{label}(s) := \text{label}(s) \cup \{ \mathbf{E}[f_1 \mathbf{U} f_2] \}$ ;
    while  $T \neq \emptyset$  do
        choose  $s \in T$ ;
         $T := T \setminus \{s\}$ ;
        for all  $t$  such that  $R(t, s)$  do
            if  $\mathbf{E}[f_1 \mathbf{U} f_2] \notin \text{label}(t)$  and  $f_1 \in \text{label}(t)$  then
                 $\text{label}(t) := \text{label}(t) \cup \{ \mathbf{E}[f_1 \mathbf{U} f_2] \}$ ;
                 $T := T \cup \{t\}$ ;
            end if;
        end for all;
    end while;
end procedure
    
```

**Figure 4.1**  
 Procedure for labeling the states satisfying  $\mathbf{E}[f_1 \mathbf{U} f_2]$ .

## Der *CheckEG*-Algorithmus

Sei  $M' = (S', R', L')$ , wobei  $S' = \{s \in S \mid M, s \models f_1\}$ ,  $R' = R|_{S' \times S'}$  und  $L' = L|_{S'}$  ( $R'$  muss nach dieser Konstruktion nicht mehr total sein). Es kann gezeigt werden, dass  $M, s \models \mathbf{EG} f_1$  genau dann, wenn gilt:

1.  $s \in S'$
2. Es existiert ein Pfad in  $M'$  der von  $s$  zu einem Knoten  $t$  geht in einem nichttrivialen stark zusammenhängenden Graphen  $(S', R')$ .



## Der *CheckEG*-Algorithmus

- ▶ Partitioniere also den Graphen  $(S', R')$  in stark zusammenhängende Komponenten. Dies hat Komplexität  $\mathcal{O}(|S'| + |R'|)$ .
- ▶ Nun finde alle Zustände in nichtrivialen Komponenten.
- ▶ benutze  $R'$  und finde alle Zustände, die über einen Pfad erreicht werden, in dem jeder Zustand mit  $f_1$  markiert ist. Dies hat Laufzeit  $\mathcal{O}(|S| + |R|)$ .

Der Algorithmus *CheckEG* benötigt offensichtlich  $\mathcal{O}(|S| + |R|)$  Zeit.

## Der CheckEG-Algorithmus

```

procedure CheckEG( $f_1$ )
     $S' := \{ s \mid f_1 \in \text{label}(s) \}$ ;
     $\text{SCC} := \{ C \mid C \text{ is a nontrivial SCC of } S' \}$ ;
     $T := \bigcup_{C \in \text{SCC}} \{ s \mid s \in C \}$ ;
    for all  $s \in T$  do  $\text{label}(s) := \text{label}(s) \cup \{ \text{EG } f_1 \}$ ;
    while  $T \neq \emptyset$  do
        choose  $s \in T$ ;
         $T := T \setminus \{s\}$ ;
        for all  $t$  such that  $t \in S'$  and  $R(t, s)$  do
            if  $\text{EG } f_1 \notin \text{label}(t)$  then
                 $\text{label}(t) := \text{label}(t) \cup \{ \text{EG } f_1 \}$ ;
                 $T := T \cup \{t\}$ ;
            end if;
        end for all;
    end while;
end procedure
    
```

Figure 4.2  
 Procedure for labeling the states satisfying  $\text{EG } f_1$ .

## Zu Theorem 1.

- ▶ Um eine zusammengesetzte CTL Formel  $f$  überprüfen zu können, wende die Markierungsalgorithmen auf die Subformeln von  $f$  an, indem wir mit der kürzesten, tiefsten verschachtelten Formel beginnen.
- ▶ Jede Überprüfung einer Subformel benötigt  $\mathcal{O}(|S| + |R|)$  Zeit.
- ▶  $f$  hat höchstens  $|f|$  Subformeln. Es folgt also:
- ▶ Der gesamte Algorithmus hat Komplexität  $\mathcal{O}(|f| \cdot (|S| + |R|))$ .

# Beispiel. (Anhand eines Mikrowellenofens)

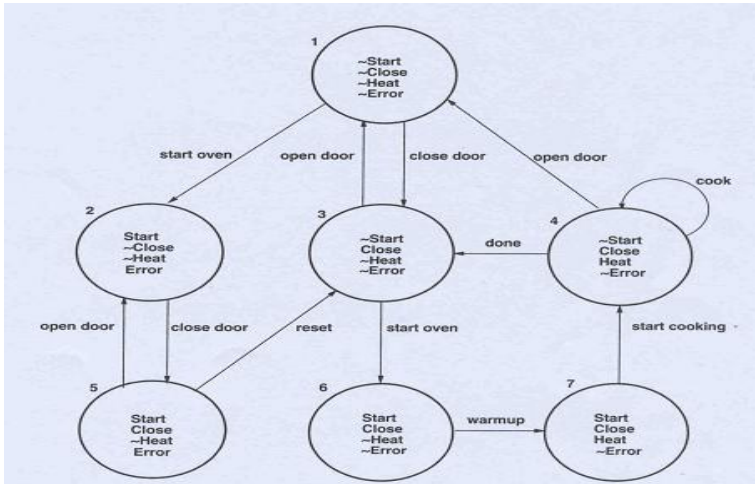


Figure 4.3  
 Microwave oven example.

## Beispiel

Überprüfe die CTL Formel **AG**(*Start*  $\rightarrow$  **AF** *Heat*). (bzw.  $\neg$ **EF**(*Start*  $\wedge$  **EG**  $\neg$ *Heat*))

- ▶ Suche zuerst die Zustände, die die atomaren Formeln erfüllen
  - ▶  $S(\textit{Start}) = \{2, 5, 6, 7\}$
  - ▶  $S(\neg \textit{Heat}) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
- ▶ Um  $S(\mathbf{EG} \neg \textit{Heat})$  finden zu können, bestimme zunächst die Menge der nichttrivialen stark zusammenhängenden Komponenten (SCC) in  $S' = S(\neg \textit{Heat})$ 
  - ▶  $\text{SCC} = \{\{1, 2, 3, 5\}\}$
  - ▶  $S(\mathbf{EG} \neg \textit{Heat}) = \{1, 2, 3, 5\}$
- ▶  $S(\textit{Start} \wedge \mathbf{EG} \neg \textit{Heat}) = \{2, 5\}$

## Beispiel

- ▶ Um  $S(\mathbf{EF}(Start \wedge \mathbf{EG} \neg Heat))$  zu berechnen, beginnen wir mit  $S(Start \wedge \mathbf{EG} \neg Heat)$ 
  - ▶ benutze  $R^{-1}$  und finde alle Knoten, von denen aus man  $S(Start \wedge \mathbf{EG} \neg Heat)$  erreichen kann.
  - ▶  $S(\mathbf{EF}(Start \wedge \mathbf{EG} \neg Heat)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ▶ Wir erhalten  $S(\neg \mathbf{EF}(Start \wedge \mathbf{EG} \neg Heat)) = \emptyset$   
 Da der Anfangszustand nicht enthalten ist, können wir schließen, dass die Kripke Struktur, der gegebenen Spezifikation nicht genügt.

# Woran scheitert das Beispiel?

## Woran scheitert das Beispiel?

Es ist möglich unendlich häufig mal hintereinander den Kreis  $\pi = 1, 2, 5, 3, 1$  zu benutzen. Wir müssen also wieder die Fairness-Bedingungen beachten.



## CTL Model Checking und Fairness

Sei  $M = (S, R, L, F)$  eine faire Kripke Struktur, wobei  $F = \{P_1, \dots, P_k\}$  die Menge der Fairness-Bedingungen ist. Eine SCC  $K$  in  $M$  ist **fair** in Bezug auf  $F$  genau dann, wenn für alle  $P_i \in F$  ein Zustand  $t_i \in (K \cap P_i)$  existiert.

## Theorem 2.

Ähnlich wie vorhin können wir zeigen:

- ▶ Es existiert ein Algorithmus, der bestimmt, ob eine CTL Formel  $f$  bezüglich der **fairen** Semantik in einem Zustand  $s$  der Struktur  $M = (S, R, L, F)$  wahr ist, mit Laufzeit  $\mathcal{O}(|f| \cdot (|S| + |R|) \cdot |F|)$

## Zurück zum Mikrowellenofen-Beispiel

Wir betrachten nun nur die Pfade, bei denen der Benutzer die Mikrowelle unendlich oft korrekt bedient.

- ▶ Es soll also unendlich oft gelten:  $F = \{P\}$  mit  $P = \{s \mid s \models \text{Start} \wedge \text{Close} \wedge \neg \text{Error}\}$
- ▶ Berechnen wir nun die Menge der SCC über  $S' = S(\neg \text{Heat})$ , dann ist  $\{1, 2, 3, 5\}$  nicht fair.
- ▶ Also  $S(\mathbf{EG} \neg \text{Heat}) = \emptyset$
- ▶  $S(\mathbf{EF}(\text{Start} \wedge \mathbf{EG} \neg \text{Heat})) = \emptyset$
- ▶  $S(\neg(\mathbf{EF}(\text{Start} \wedge \mathbf{EG} \neg \text{Heat}))) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Das Programm erfüllt also die Formel unter den gegebenen Fairness-Bedingungen.

# Was liefert und CTL

# Was liefert und CTL

- ▶ Einfache Syntax und Semantik

## Was liefert und CTL

- ▶ Einfache Syntax und Semantik
- ▶ Geringe Laufzeit

## Was liefert und CTL

- ▶ Einfache Syntax und Semantik
- ▶ Geringe Laufzeit
- ▶ Problem Fairness abzubilden

# Fragen?